ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
119

For Senior & Graduate Courses

場の理論の構造と幾何

3次元超対称場の理論からその先へ

山崎 雅人　著



サイエンス社

SGCライブラリ-119

場の理論の構造と幾何

3次元超対称場の理論からその先へ

山崎 雅人 著

サイエンス社

まえがき

まず問いから始めよう：**量子場の理論とは何なのだろうか？**

この本が取り扱うのは場の理論，特に超対称性を持つ場の理論である．しかしそもそも 21 世紀の現在，場の理論についても超対称理論についても素晴らしい本が沢山出ている中で何故今更，新たな一冊が必要なのか？

このことを自分自身に問い直すとき，筆者は素粒子物理学の勉強を始めた頃を思い出す．その頃の私が漠然と考えていたのは，場の理論の基礎はさっさと習熟しそこから「卒業」して，例えば超弦理論のより「先端的な」話題に進んでいかなければいけないのではないかということである．素粒子物理や特に超弦理論の研究をする現代の学生には学ばなければならないことが数多くあるのは事実であり，これはある意味実用的な立場といえなくもない．

勿論，場の理論の周辺に本質的な問題が数多く残されていることは明白である．場の理論は広汎な枠組みであり，それを様々な現実世界の系に応用することは各分野において重要な問題であるし，また個々の場の理論の問題をどう解くか（例えばクォークの閉じ込めをどう解析的に示すか）は大きな問題であるということは当時の私にも分かっていた．しかし，我々の考える場の理論の基本的なパラダイムは偉大な先人達の努力によって既に確立されており，もう**場の理論の枠組みそのもの**についてやることは残されていないのだろうか？ 後世に生まれた我々は先人達の打ち立てたルールに従って場の理論という「通常科学」のゲームにいそしむことが研究者としての仕事であるのだろうか？ これが当時の私が抱いた疑問である．

無論，「通常科学」としての場の理論の研究が極めて重要であることは論を俟たないし，それこそが科学研究の一環としての場の理論の研究の王道であるとさえいうことができる．しかし，物理学という学問では根源的な問いに絶え間なく立ち返ることによって時に大きなブレークスルーがもたらされてきたのも確かであり，場の理論という巨大な枠組みでさえもその例外ではないと期待するのはそれほど突飛なことではないかもしれない．場の理論の数学的な基礎付けは現在でもまだ完成していないのは事実であるし，近年の超弦理論の発展に伴って場の理論にも新しい見方がもたらされるようになってきた．場の理論の定式化そのものについて改めて考え直してみることも，全く無駄とはいえないのではないか．歴史を振り返っても，我々の場の理論の理解が劇的に深まった例はある：例えば繰り込みと有効場の理論の考え方は場の理論の教科書を大きく書き換えるに至った．

そもそも我々は場の理論を，その本質をどれだけ理解したといえるのだろうか？ 場の理論を指定するデータは何だろうか？ 全ての可能な場の理論のうち，我々が通常の意味で知っているものはどれだけなのだろうか？ 現状の場の理論の定式化とは全く異なる新たな場の理論の定式化は存在する

のだろうか？ 場の理論の全体の空間を考えたときに，そこに何か構造はあるだろうか？ ここでの問いは特定の場の理論（例えば4次元の量子色力学（QCD））をどう理解するかという問いではなく，場の理論やその集まりの定式化や理解といった場の理論そのものに関わる問いである．

勿論，この問いは既に多くの先人によって考えられてきたし（なかでも後述するように繰り込みの考え方は本質的である），そもそもこの問い自体は適切に問題を設定しない限りしばしば曖昧なものである．現在の我々の知識の中で答えることのできる適切な問いであるかどうかも全く明らかでない．

しかし筆者はこの問いに全く手がかりが無いわけではないと主張したい．この本で紹介するのは，この問いにアプローチする上で，一つの重要な手がかりに育っていく可能性がある考え方である―その歴史は古いが，21世紀に入ってからその重要性が再認識されてきた．

一言で言えば，それは様々な**幾何的手法**を駆使して超対称ゲージ理論の**集合**の性質やその間の関係，特にその**双対性**を理解するというものである．ここではこのような理解の枠組みのことを**幾何的ゲージ理論**（**geometric gauge theory**）と呼ぶことにしよう．これは，いわば場の理論のなす全体の構造を，幾何学の問題に翻訳する試みであるといえる．

本書が目標とするのはこの幾何的ゲージ理論の考えを**3次元$\mathcal{N}=2$超対称ゲージ理論**と**3次元多様体論**との関係を例に説明することである．そこでは2次元や3次元の双曲幾何，結び目理論，クラスター代数等の幾何・代数が代わり代わり現れ，超対称ゲージ理論の豊饒な世界を描き出していく．

この分野で進展があったのはここごく数年のことであり，この主題に正面から取り組んだ本は英語の本を含めてこれまで存在してこなかった．本書の目的はそのギャップを埋めることである．しかしだからといって奇を衒うことが目的ではない．この本で取り扱う超対称ゲージ理論の性質の多くは90年代から知られているスタンダードなものである．むしろ，そのスタンダードな内容を再度考え直すことで，**幾何的な構造が自然に現れる**というのが主張の一つである．

本書で現れる数学は物理の学生にはそれほど馴染みの無いものかもしれず，本書の内容は少なからぬ初学者に数学的過ぎるとの印象を与えるようである．しかし，我々の議論する数学的構造は人工的に作り出すものでない．それは超対称場の理論たちに真摯に向き合い，耳を澄ますことで聞き取ることのできる美しい調べなのである．

この本は超対称場の理論についての網羅的な教科書でも入門書でもなければ，分野の権威が経験をもとに分野の発展を振り返った本ではない．また，長い年月を経てその内容が確立された内容をまとめた本でもない．むしろ，この本の内容の核心はごく最新の研究の成果であり，その意味でこの本の内容が早晩時代遅れになる可能性も大いにあるし，筆者自身今後の研究によってそうなることを願っている．本書の内容の一部は筆者の独断と偏見を含んでおり，この点については読者の寛恕を乞う他はない．

それら全ての欠点にもかかわらずこの本が目指すことが一つある．それは，場の理論たちについて理解しようとする試みの中で筆者が経験してきた出会いのストーリーと興奮を，**今まさにあるものとして**読者に伝えることである．21世紀に入った今なお場の理論たちが生きたものとして躍動する世界が存在すること，そのことこそが，十年前の自分，そして今この本を手に取っているあなた

に伝えたいささやかなメッセージである.

2015年4月　プリンストンにて

山崎雅人

謝辞

本書の内容は，筆者がこれまで30余年の間に数え切れないほど多くの人と出会い議論する中で生まれてきたものである．その数は余りに多く，ここでは一人一人名前を述べることはできないが，この場を借りて皆さんに感謝したい.

本書に直接関係する内容については共同研究者であり数学者でもある寺嶋郁二氏，長尾健太郎氏との議論には特に感謝したい*1)．寺嶋氏及び米倉和也氏からは原稿にコメントを頂いた．さらに本書の執筆に関連して，Nima Arkani-Hamed, Benjamin Assel, Francesco Benini, Tudor D. Dimofte, John Estes, 藤博之, Dongmin Gang, Sergei Gukov, Akikazu Hashimoto, Jonathan J. Heckman, 細道和夫, Ken Intriligator, Ivan Chi-ho Ip, Rinat Kashaev, Igor Klebanov, Sungjay Lee, 西岡辰磨, 奥田拓也, Peter Ouyang, Pavel Putrov, Shlomo S. Razamat, Mauricio Romo, Nathan Seiberg, 立川裕二, Jörg Teschner, Cumrun Vafa, Herman Verlinde, 渡辺伯陽, Brian Willett, Edward Witten, Dan Xie の各氏との議論にも感謝したい.

本書の出版を企画してくださったサイエンス社，編集者の平勢耕介氏また特に高橋良太氏に感謝したい．執筆依頼を受けた時には，駆け出しの研究者がこのような書物を日本語で書くことに意味があるのか正直戸惑いも覚えたが，与えられた分量で好きなように書かせて貰ったことは自分の理解を見つめ直す貴重な経験であった．そのささやかな成果が読者にとっても有意義なものであることを祈っている.

本書は筆者が各地で行った講演，特に日本物理学会秋期大会 (2012)，京都大学数理解析研究所 (2013)，国立台湾大学 (2013) *2)等でのまとまった講演・講義さらには雑誌数理科学での記事[1],[2]*3)等の内容を整理・発展させたものである．講義等の機会にフィードバックをくださった皆様に感謝したい.

また，筆者の研究及び執筆活動をサポートしてくださった東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構及びプリンストン高等研究所，さらには私の科学研究に支援を与えてくださってきた全ての皆さんに感謝したい*4)．

---

*1)　本書の執筆中に長尾氏の訃報に接した．数学や物理を議論できた彼との短くそして素晴らしい時間は何ものにもかえがたいものであった．素晴らしい人材が失われてしまったことは本当に残念でならない．この本を彼の思い出に捧げたい.

*2)　http://phys.cts.ntu.edu.tw/workshop/2013/1212string/default.aspx?tclass=2 から youtube にアップロードされた講演の動画（計3時間分）を見つけることができる．また筆者のウェブページからは本書の内容に関連した講演のビデオへのリンクが見つかる.

*3)　数理科学での記事は本書の内容を本書よりもずっと短い分量で説明しているので忙しい方には特にお薦めである.

*4)　本書の内容についての研究は東日本大震災の前後に行ったものである．絶望的なまでの無力感の中でそれでも世界に向き合い，自分の生きる意味を問い直し続けること，そのことへの尽きせぬ思いこそが，私を研究に駆り立てる原動力なのである[3].

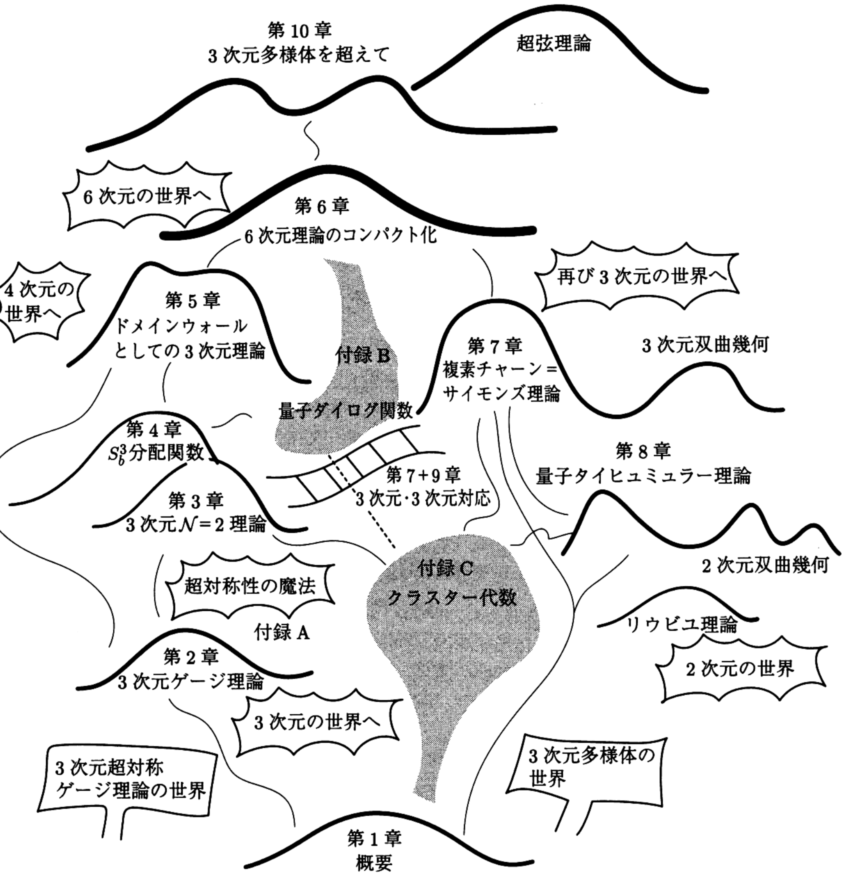


図 1 本書の世界を踏破するためのロードマップ．我々は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の世界と 3 次元多様体の世界を自由自在に行き来する．学問に境界はないのだ．

内容の要約

読者の便宜のために本書の内容を概観しておこう（図 1）．

第 1 章では，各論に入る前に基本的な考え方を本書の他の部分よりも一般的な文脈で説明し，後の議論を動機づけたい．

第 2 章で 3 次元場の理論，特にその「貼り合わせ」について説明したあと，次の第 3 章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論の基礎事項についてまとめる．次の第 4 章ではそれを S^3 分配関数や付録 B で定義される量子ダイログ関数の言葉に読み直す．第 5 章では S^3 分配関数がある有限次元のヒルベルト空間の演算子の期待値と再解釈され，その背景には 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のドメインウォール解釈があることが明らかにされる．

ここまでは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論についてもっぱら議論してきたが，第 6 章以降は 3 次元多様体の世界に入っていく．第 6 章で 6 次元理論のコンパクト化を議論した後，第 7 章ではそこから現れる複素チャーン＝サイモンズ理論やその古典解である 3 次元双曲幾何学を取り扱う．

さらに，より詳細に 3 次元超対称理論の性質を議論するために，第 8 章において古典・量子タイ

ヒュミュラー理論について整理した後，次の第9章において3次元多様体の理想四面体分割や結び目のブレイド表示に対応した3次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称場の理論についてコメントし，最後の第10章で本文は終わりを迎える．三つの付録A，B及びCではそれぞれ超対称ゲージ理論，量子ダイログ関数及びクラスター代数についてまとめた．また読者の便宜のために索引と記号表も付けた．

予備知識について

本書の主な読者としては素粒子物理学に興味のある大学院生や意欲的な学部生を念頭に置いた．また関連した分野の研究者が手っ取り早くこの分野を学ぶ上でも手助けになればと願っている．

本書は場の理論についての伝統的な教程では場の理論の発展コースに位置づけられるものである．しかし，本書の理解に必要な知識は実はそれほど多くはなく，できるだけ self-contained になるように心がけたつもりである．

場の理論の基礎的考え方，例えばゲージ理論とは何であるか，また繰り込みとは何であるかについて概念的な理解があることが望ましいが，ファインマン図による摂動計算の詳細のような技術的内容は殆ど必要としない．4次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の基礎（例えば Wess-Bagger の教科書[4]での最初の1章から7章までの内容）は仮定されているが，全体の概要を把握する上では必須とはいえない．例えば超場形式についての知識は第3章で用いられているが，それは専ら説明の簡明さの為であって，その後の章では殆ど必要でない．従って，第3章の超場形式で挫折しそうになった読者は適宜飛ばして読み進めればよい．また，超弦理論についての知識はごく一部に表面的に言及されている箇所があることを除いて基本的に必要としない筈である．数学については基礎的な微積分，複素解析，微分幾何（例えば微分形式）やごく簡単なトポロジーを除けばそれほど専門的な高度な内容は必要としない．必要な数学的事実，例えば3次元双曲幾何や量子ダイログ関数についてはその都度説明と共に導入されている．

本書は主として物理系の読者を念頭に置いたので物理的説明が重視されている箇所が多いが，より数学的な内容を中心にして読むことも可能である．その場合は第7，8，9章や付録B，Cの数学的部分を中心に読み，興味・必要に応じて前の章を拾い読みすればよい．

本文中の小さい字の部分や脚注にはやや発展的な事項や補足説明を加えた．これらについて理解できないところがあっても全体の流れの理解には差し支えないのでそのまま読み進められたい．物理の理解は螺旋状に深まるものであって，今は分からない部分でも後から立ち返るとその意が通じることもあるかもしれない，それは読書の一つの楽しみでもある．

演習問題について

読者の理解を助ける為，各章末には演習問題を配置した．演習問題は本文の内容に従えば簡単なものが多いが，一部にはやや発展的な内容や本書で直接取り扱われていない補助的な文献の内容を扱っているものもあり，自分で考えたり文献を調べたりすることも必要になるかもしれない．また必ずしも答えがはっきり定まっていないものもある．全部完璧に解こうとせずに，能動的に学習するための手助けとして気楽に向き合っていただければと思う．難易度の目安として便宜的に [♦], [♦♦] のように印を付けた．[♦] はすぐに計算で示せるもの，[♦♦] はやや難しめの問題であるが，分類は恣意的であるので ♦ の数には拘泥されることないようお願いしたい．

表記・規約について

専門用語については日本語に訳すか，カタカナで表記するかのどちらかだが，初出の際には英語表記も付記した．実際の研究の現場では専ら英語表記を使うことになるので常に英語表記を念頭に置くのが実用的である．

本書での記号については巻末の記号表にまとめた．

計量の符号が本質的な所は殆どない筈だが，本書では便宜上，ユークリッド化に便利であり，超対称性の文献で比較的多い $(-++\cdots+)$ を用いたつもりである．勿論，ユークリッド化した後の計量は $(++\cdots+)$ となる．

サポートページ

本書の誤植等の付加情報については書名を検索すれば出てくるウェブページから得られるようにする予定である．現在の URL は

`http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/SGCbook.shtml`

である．

目 次

第 1 章
概要：場の理論の幾何

場の理論の**集合**を幾何的に理解するとはどういうことか，またそれは何故必要であるのか？ 本章ではこれらの問いに対する一定の答えを順を追って説明していく．基本的な考え方を説明することを目的としたのでその記述は次章以降の内容よりもやや一般的であり，それ自身独立した序論として本書の内容を手早くまたより広く概観する為に役立つ筈である．

1.1 場の理論とは何か

今日の物理学の体系は，この自然界を理解しようとする先人達のたゆまぬ努力の上に築きあげられてきたものである．その巨大な物理学の体系のなかでも最も強力かつ精緻な理論の一つが**場の理論**（**field theory**），特にその中でも**量子場の理論**（**quantum field theory**）である．場の理論は極微な素粒子の世界から宇宙規模の現象に至るまでの広汎な対象を記述する理論であり，それは物理学のみならず人類全体にとっての輝かしい財産とさえいえるだろう．

この本を手にしている読者の多くは，場の理論が何であるかについて既にある程度の感覚を持っているだろう．にもかかわらず敢えて問うてみよう：**そもそも場の理論とは何なのだろうか？**[*1)]

一部の読者にとっては，この問いは奇異な問いに見えるかもしれない．この本の前書きでは場の理論の基礎的な考え方を仮定すると書いたのに，今更それ

---

*1) 関連して，量子場の理論を数学的に厳密に定義できるかという長年の難問がある．本書の議論にとってそのような数学的に厳密な枠組みは直接必要でなく，むしろその焦点は場の理論を物理としてどう理解・定式化するかという物理の範疇での概念的な問題である．また本書の議論では，主として超対称ゲージ理論から真空のモジュライ空間や分配関数といったより具体的対象を取り出し，そのレベルで議論を進めるので超対称場の理論の豊かな構造のうちごく一部（しかし，とても本質的な一部）しか用いない．勿論，場の理論の数学的定式化があれば，我々の議論は遙かに明確なものになる可能性が高いし，逆に場の理論の定式化を物理的に考え直すことが逆にその数学的定式化に貢献する可能性も大いにあると考えたい．

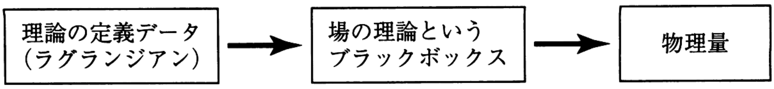


図 1.1　場の理論の一つの図式化：場の理論とはラグランジアンを入力，物理量を出力とするブラックボックスである．

を蒸し返すとはどういうことか？

勿論，すぐ下でも述べる通り，場の理論とは何であるかについて既に一定の答えがあることは確かである[*2)]し，既存の場の理論が大きな成功を収めてきたことも確かである．筆者はこの点について全く異論は無い．しかし，ここで目指すのは場の理論そのものをまっさらから見つめ直すことであり，そのための出発点として先の問いは無駄ではないだろう．

場の理論の教科書では，出発点となるのは多くの場合場の汎関数 (functional) である**ラグランジアン (Lagrangian)** である—例えば自由場のラグランジアンや ϕ^4 理論のラグランジアンを思い浮かべればよい．場の理論とは，このラグランジアンから出発してファインマン図や繰り込み等の手法を駆使して物理的な予言・物理量（例えば散乱断面積）を引き出すツールに他ならない．この立場からすると，場の理論とはラグランジアンを入力，物理量を出力に取る一種のブラックボックスであり，場の理論を学ぶとは，このブラックボックスのコピーを自分の頭の中に作っておく作業に他ならない（図 1.1）．

これはいささか乱暴な単純化である[*3)]が，物理学とは何であるかの教科書的な理解とも合致する．この自然界は宏大であり複雑であるが，物理学ではその自然現象のある特定の性質，すなわち観測可能な物理量に着目する．理論家の役割はその物理量を記述する理論を創り，その理論から物理量の値を導き出し，観測された物理量の値を再現することである．この言葉では，図 1.1 では理論とはラグランジアン及びそのパラメーターの組に他ならない．

以下では「自然」「観測可能」をルーズに用いる．例えば現在我々が住んでいる宇宙において現在の人類が行うことができる実験で観測可能であるかどうかは問題としな

*2)　場の理論について深く考えてきた読者ならば，この問いに対して数多くの答えを考え出すことができるかもしれない：例えば S 行列やその解析性を使った場の理論へのアプローチは長い歴史があり，近年超対称ゲージ理論の文脈でその価値が再発見されてきた．しかし場の理論に対する全てのアプローチを網羅的に概観することは筆者の手には余るし，本書の目的の為に必要でもない．

*3)　物理理論をこのように定式化するのが乱暴である理由の一つとして，観察の理論負荷性がある．これは，大雑把には，そもそも自然界に存在する多岐にわたる現象のうちどれが理論によって説明されるべきであるかを決定するには，理論が必要であることを指す．例えばケプラーは太陽系の惑星を正多面体に対応させようとしたが，現在の物理学の理解では太陽系に惑星が何個存在するかは宇宙の基本法則からは説明される必要がない．この意味で理論とはブラックボックスの入力のみならず，入力と出力の両方を規定することになる．同様の批判はいろいろ考えられそれ自身興味深い論点を含んでいるが，図式化の詳細に拘泥することが目的ではないので，ここではこの話題に深入りすることは避けておく．

い．本書で問題とするのはそのような「実用的」な問いではなく，仮にある場の理論で記述される世界があり，それについて原理的に全ての物理量を可能な限り最高の精度で知ることができたときにその物理量と理論とがどう対応するかである．これはしばしば現実世界では満たされない仮定ではあるが，場の理論そのものを考え直そうとする我々の目的の為には十分である．

この場の理論のパラダイムが大きな成功を収めてきたのは読者の知るとおりである—量子電磁力学（QED）の電子の磁気モーメントの精密計算とその実験との一致はそのめざましい例の一つであったし，電磁気力，強い力と弱い力を記述する素粒子の標準模型もこのパラダイムの範囲内で記述できる．同様の成功例は素粒子に限らず物理の様々な分野で数多く見つかる．

しかし，場の理論そのものについて考え直すとき，ここまでの理解には実は不満足な点が多い．以下ではこのことを順々に見ていくことにしよう．

1.2 繰り込みと有効場の理論

図 1.1 の矢印，つまりラグランジアンを与えられたときに物理量を読み取ることは順問題と呼ばれる問題であり，（実際上可能かどうかは別問題として）原理的には解ける問題である．勿論，これは一般にはかなり非自明な問題である—例えば量子色力学（QCD）は低エネルギーでは非摂動効果が本質的な強結合の理論であり物理量（例えばグルーボールの質量）を解析的に計算すること，あるいはそれを実験的に検証することは一般には困難である．しかし原理的な計算方法が無いわけではないし，例えば格子に載せてコンピューターで計算することもできる．

しかし実際上重要な問題はこの逆である．我々が自然界を観察して物理量の値を得たときに，場の理論のラグランジアンを与えるためにはどうしたらよいのだろうか？ これは逆問題と呼ばれるクラスの問題であって，場の理論の場合には一般的に適用できるアルゴリズムがあるわけではない．このことは単に純理論的な問題というわけではなく，文脈によっては非常に実用的な問題である．例えば CERN の加速器 LHC（Large Hadron Collider）が何かシグナルを見つけたときに，何百もある標準模型を超えた模型の中からどれが正しいのかを一意に決定する方法はあるのか[5]？

逆問題の難しさに気づくのに場の理論は必要ではない．筆者が解析力学を学んだ時，出発点となったのもラグランジアンであった．しかしそもそもラグランジアンはどうやって求めてくるのか？ 初級力学の問題では既に運動方程式（ニュートンの法則）が知られているので，そこから遡ってラグランジアンの形を推測することは容易であった．しかし，実際の問題では運動方程式が既に知られていることは少なく，運動方程式を経由することなしにラグランジアンを

直接取り出してこなくてはならない．

現代的な場の理論の理解ではラグランジアンが何であるべきかに関して一定の解答がある．この根幹をなすのはウィルソン（K. G. Wilson）によって明らかにされた**繰り込み**（**renormalization**）の理解である[6]．彼は場の理論の記述に**エネルギースケール**の概念を持ち込んだ：我々の理解する場の理論は高エネルギーでの理論に対する**低エネルギー有効場の理論**（**low energy effective field theory**）であるのだ．

現在我々の理解する場の理論とは，我々が考えたい文脈で物理量の測定を行うエネルギースケールで有効な理論である．より高いエネルギー（カットオフスケール Λ_{UV}）ではその理論の記述は一般には破綻し*4)，それは例えば超弦理論のような場の理論の枠内をはみ出した理論で記述されるかもしれない．しかし，低エネルギーでの物理はそうした高エネルギーでの理論の詳細に依らず，問題としているエネルギースケールでの有効場理論により記述できる．そしてその有効場の理論は現在我々の理解するところの場の理論で記述されるのが自然であることが時空の**ポアンカレ対称性***5)の既約表現である粒子の存在及び幾つかの仮定（例えば理論の局所性）から示唆されるのである．（この点については例えばワインバーグ（Weinberg）による教科書 [7] に強調されているが，本人も認めている通り[8]，彼の議論には抜け穴も多い．また場の理論そのものは非相対論的現象の記述にも有用である．）

高エネルギーの物理が低エネルギーの物理から分離（decouple）することは我々が自然界を理解する上で本質的である．我々が高いエネルギースケールの物理（例えば宇宙初期の量子重力的振る舞い）を知らずとも低エネルギーの物理（例えば弾丸の軌道）を計算できるのはこの繰り込みの御蔭であり，これがなければ物理学を発展させることは極めて困難であったに違いない．しかし一方で，繰り込みの効果は低エネルギーの実験から高エネルギーの物理を取り出すのを困難にしており，現代物理学はこの微妙なバランスの元に学問として成立している．些か冗談めかして言えば，物理学者の存在と人間原理から繰り込みと低エネルギー有効場理論の必要性が要請されるのだ．

低エネルギー有効理論としての現代的な見方から場の理論を考えよう．理論を指定するために必要なデータはそれほど多いわけではない：時空の次元，理論の対称性，そしてその対称性のもとである表現で変換する場である．

*4) 漸近自由と呼ばれる場の理論では原理上任意のエネルギースケールまで場の理論の記述が成り立ちうる．しかし例えば素粒子の標準模型（すぐ後で述べる）は漸近自由ではない（参考までに，これに対して標準模型を拡張した例えば $SU(5)$ 大統一理論は漸近自由である）．

*5) 本書ではもっぱら相対論的超対称場の理論を扱い非相対論的場の理論は扱わない．但し場の理論の双対性やゲージ化による場の理論の結合・分解といった概念は非相対論的場の理論にも適用できるし，本書で展開される幾何的構造（の一部）の類似が非相対論的理論においても存在する可能性はある．

まず，理論の対称性を固定しよう．本書ではもっぱら相対論的な場の理論を考えるので，時空の**ポアンカレ群**（**Poincaré group**）のもとでの対称性を要請する*6)．

理論にはポアンカレ群と交換する内部対称性，**局所対称性**（**ゲージ対称性**（**gauge symmetry**））及び**大域対称性**も存在する．また本書では専らさらに**超対称性**（**supersymmetry**）を持つ理論を考える（超対称性が具体的に何であるかの詳細はこの章では直接必要としない）．

次に，それらの対称性のもとで既約表現として変換する**場**（粒子）を導入する．ポアンカレ群の既約表現はその表現に応じてスカラー（スピン 0），フェルミオン（スピン 1/2），ゲージ場（スピン 1）等と呼ばれ，それらの場はそれぞれの局所・大域対称性のもとである表現として変換する．

最後に，これら場の汎関数であるラグランジアンで全ての対称性と両立するものを全て書き下す．そのような項は無限個存在するが，有限個の項（繰り込み可能な項）を除いて大部分の項は次元解析から繰り込みの**カットオフスケール**（**cutoff scale**）Λ_{UV} によってその効果が抑制されることになる．従って，カットオフスケールよりも十分にエネルギー（場の値）の小さなところでは，繰り込み可能なラグランジアンに制限しても多くの場合問題はない．但し，繰り込み不可能な項はその効果がカットオフの効果によって比較的小さくなるだけで，その効果が測定できないわけではない*7)．

以上の説明では素朴な次元勘定から定まる繰り込み可能性の簡便な判定条件が，ファインマン図の詳細な解析から定まるより厳密な繰り込みの条件と一致することを暗黙に仮定した．この主張が何故成り立つのかについてはポルチンスキーによる明快な解説 [9] を参照されたい．

この説明は抽象的だったので例で説明してみよう．以下の二つの例は本書の他の部分では必要ではないが教育的である．

場の理論の教科書でしばしば取り上げられる次の ϕ^4-理論を考えよう．この理論は 4 次元時空でポアンカレ対称性を課し，そのもとでスカラーとして振る舞う場 $\phi(x)$ にさらに $\mathbb{Z}_2$ 大域対称性 $\phi \to -\phi$ を課したものである．このとき可能なラグランジアンは

---

*6) 本書の後の章（例えば第 4 章）では平坦ではない時空での場の理論を考え，このときポアンカレ群は時空の選択に応じて別の群に取り替えられる．但し，その場合もまず理論は常にまず平坦な時空の上で定義し，その繰り込みも主として平坦な時空上で考察するので以下の考察に変更はない．

*7) 例えば陽子崩壊は素粒子の標準模型において繰り込み不可能な項で表されその効果は Λ_{UV} の冪のために小さくなっているが，スーパーカミオカンデでの陽子崩壊の実験からその係数には実験的に強い制限が付いている．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 - \frac{1}{\Lambda_{\mathrm{UV}}^2}\lambda'\phi^6 - \frac{1}{\Lambda_{\mathrm{UV}}^2}\lambda''(\partial^2\phi)(\partial^2\phi) + \cdots \tag{1.1}$$

と定まる．但し，パラメーター m 及び $\lambda, \lambda', \lambda''$ はそれぞれ質量次元 1,0 を持つ．この式で第 1 行目は繰り込み可能な項であり，これは場の理論の教科書でしばしば出発点となるラグランジアンに他ならない．第 2 行目は無限個の繰り込み不可能な項（例えば $\frac{1}{\Lambda_{\mathrm{UV}}^{2n}}\phi^{4+2n}$）のうち二つだけを書いたものであり，次元解析から分かるように少なくとも Λ_{UV}^2 でその効果が抑制されている．これらの項は Λ_{UV} よりもずっと小さいエネルギースケールでは無視できることになる．エネルギースケールが上がってくるとその効果は徐々に無視できなくなり，特に Λ_{UV} 程度のスケールでは無限個の繰り込み不可能な項が同程度の寄与を持つようになり，理論は無限個のパラメーターを必要とし予言能力を失う．

より複雑で現実的な例として素粒子の**標準模型**（**standard model**）を考えよう．この場合は，ゲージ群として $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ を固定する．次にそのもとでの物質場（フェルミオン，今の場合はクォーク及びレプトン，ニュートリノ）の表現を固定する．

$$\begin{aligned} &Q_L = (u_L, d_R) : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{3}}\ , \quad u_R : (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{\frac{4}{3}}\ , \quad d_R : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-\frac{2}{3}}\ , \\ &(\nu_L, e_L) : (\mathbf{2}, \mathbf{1})_{-1}\ , \quad e_R : (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-2}\ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

但し，例えばここで $Q_L = (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{3}}$ とは左巻きクォーク Q_L が $SU(3)$ のもとで **3** 表現，$SU(2)$ のもとで **2** 表現，$U(1)_Y$ のもとでチャージ $-\frac{1}{3}$ を持つことを意味する．これにスカラー場であるヒッグズ粒子，（さらには必要ならば右巻きニュートリノ ν_R を加え）そのあとでローレンツ対称性とゲージ不変性に反しない繰り込み可能なラグランジアンの項を全て書き下せば標準模型のラグランジアンが得られる．このラグランジアンは有限個のパラメーター（例えばゲージ結合定数やクォークの質量）を持ち，その値は実験と比較することで決めることができる*8)．

このように対称性とその表現のみから低エネルギーのラグランジアン，従って対応する物理量の形が決定できてしまう*9)．特にそれは高エネルギーでの理

*8) こうして決まるパラメーターの値が「自然」なものであるかどうかはまた別問題である．パラメーターのファインチューニングを許さない立場（naturalness）からは不自然に小さなパラメーターの値には（例えば対称性やダイナミクスに関連した）何らかの理由付けが必要である．例えばヒッグズ粒子の質量やあるいは重力と結合させたときに重要になる宇宙定数の値は自然に期待される値よりもかなり小さくなっており，これらはそれぞれ階層性問題や宇宙定数問題として知られる難問である．

*9) 但し繰り込み群の固定点（fixed point）が 1 点では無く有限次元の固定多様体（fixed manifold）である場合には理論のマージナル変形（marginal deformation）を考えることができる．固定多様体での位置によって物理量は変化するので，物理量の値は次元や対称性のみから一意に定まるわけではない．超対称ゲージ理論はしばしばこのようなマージナル変形の自由度を持つ[10]．

論の詳細に依らない．このことは**普遍性**（**universality**）として知られており例えば物性物理学では極めて重要な役割を果たす．例として，$\mathbb{Z}_2$ に値を持つ (3+1) 次元イジングスピン系の低エネルギー有効理論は，その対称性の考察より ϕ^4–場の理論で与えられることになる．このようにエネルギースケールの高い領域での紫外理論は連続場の理論である必要さえなく，格子の理論であり得るし，また場の理論ではない量子重力の理論であってもよい．

繰り込みの概念は理論の記述にエネルギースケールを持ち込み素朴な図式（図 1.1）の精密化を要求する．「物理量」という時，我々はどのエネルギースケールにおいて物理量を考えるのか明確にする必要があるのだ．対応して，ラグランジアンの変数も変化する必要がある．これはパラメーターの**繰り込み群ランニング**（**renormalization group running**）と呼ばれる．つまり，物理を記述するのはラグランジアン L 及びあるエネルギースケール μ のもとでのラグランジアンのパラメーター $\vec{c}(\mu)$ の組 $(L, \vec{c}(\mu))$ で与えられることになるのだ．

本書では主としてゲージ理論を考え，またその低エネルギーでの振る舞いを調べる．ゲージ場 A_μ は運動項

$$L_{\text{ゲージ運動項}} = -\frac{1}{2g^2}\int \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

を持ち，係数 g はゲージ結合定数と呼ばれることを思い出しておこう．但し，ここで場の強さは $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ として与えられるのであった．またトレースはゲージ対称性のリー環の生成子を T^a とした時いわゆるキリング形式（Killing form）

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{1.4}$$

を選んだ*10)．単純群 G に対する対称 G–不変非縮退（non-degenerate）2 次形式は規格化の曖昧さを除いて一意であり，それはここでのトレースと一致する．

4 次元時空を考えることにすると，次元解析から g は質量次元で無次元であり，繰り込み群のもとでのその変化は g についての摂動展開のもとで

$$\frac{d}{d\log\mu}g(\mu) = \beta(g) = -\frac{b_0}{16\pi^2}g^3 + b_1 g^5 + b_2 g^7 + \cdots \tag{1.5}$$

の形をしている．但し，エネルギースケールを μ と書くことを思い出そう．関数 $\beta(g)$ は**ベータ関数**（**β 関数，beta function**）と呼ばれる．$\beta(g)$ の g^3 に比例する項は 1 ループの効果であり，その係数 b_0 の符号は**漸近自由**な理論に対しては正である．このとき，$g = 0$ から出発したとしても，低エネルギーに行くに従って繰り込みの効果によって g の値は大きくなっていき，やがては g の値がオーダー 1 程度になったときに g についての結合展開 (1.5) はその有用性

*10) 例えば $SU(2)$ ゲージ群の時を考え，リー環の生成子をパウリ行列 σ^a を用いて $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ と取った時，キリング形式は通常の意味でのトレースと一致する．

を失い**強結合**の効果を取り入れることが必須になる*11)．本書が問題にしたいのはこの強結合領域での場の理論の振る舞いをいかに解析するかである．特に，強結合領域では場の理論の間に**双対性**（**duality**）と呼ばれる驚くべき現象が見いだされる．

1.3 双対性

1.3.1 何故双対性か

双対性について説明する前にここまでの議論を振り返ってみよう．

理論のラグランジアンを指定するのは対称性及びその元での表現としての場のみであった．これはエレガントな場の理解であるが，我々は元の問いに立ち戻ることにしよう：自然界を観察して得られる物理量から理論・ラグランジアンを定める方法はあるかという我々の問いの答えになっているのだろうか？

この問いの答えは残念ながら否である．仮に自然界を観察することが可能であってもそれはしばしば不必要なデータ（バックグランドや統計誤差）を多数含んでおり，そこから本質をつかみ背後にある秩序，この場合は対称性を見いだすのには非自明な洞察を必要とする．勿論，逆問題がアルゴリズムによって解けないのはこのためである．もし観測から物理理論を導くアルゴリズムが確立していたら，現在の物理学は今よりもずっとつまらないものになっていただろう．

しかしここで議論を終わりにするのではなくもう少し踏み込んでみよう．ここには原理的な問題が潜んでいるからである．

理論の定義データのうち，考える時空次元は殆どの場合問題の設定から自明に定まっている．また理論の大域対称性は物理量に直接反映されるので，原理的には一意に確定することができる筈である（これはあくまで原理的にという意味であり，実際上それが実行できるかは別問題ではある）．また対称性は自発的に破れることもある．しかし対称性がある理論と無い理論では物理量の予言が異なることが期待される*12)ので，観測可能な物理量から理論の対称性の有無は原理的には判定できる筈である．

しかし，それではそのほかのデータ，ラグランジアンに現れる場（これはゲージ対称性に対応するゲージ場を含む）はどうだろうか？ 実は，これらのデータ

*11) ゲージ結合定数 g の値が大きくなる前に繰り込み群の固定点に流れ込んでフローが止まることもあり，その場合は (1.5) の範囲内で解析が完了する．これが起こるのは例えば $0 < b_0 = \epsilon \ll 1$，$b_{1,2,\ldots} = \mathcal{O}(1)$ の時であり，このとき (1.5) は $g = g_* \sim \epsilon^{1/2}$ に固定点を持ち，(1.5) の g^7 以降の項は $\mathcal{O}(\epsilon^{7/2})$ となり無視できる．この種の固定点は 4 次元の $SU(N_c)$QCD で N_f フレーバーを持つ理論で N_f と N_c の値をチューンすると現れ，**バンクス＝ザックス型固定点**（**Banks-Zaks type fixed point**）[11]と呼ばれる．4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の場合は，後に述べるコンフォーマル・ウインドウの端 $N_f \lesssim 3N_c$ がこれにあたる．

*12) 例えば相対論的場の理論において自発的な大域対称性の破れは南部＝ゴールドストンモードの存在を予言する．

が自然現象によって一意に定まるかどうかは以下に述べるようにかなり微妙な問題である．一般にスカラー場以外の場は恥ずかしがり屋であって直接に測定できないからだ．

まず，場としてスピン 1/2 のフェルミオン $\psi(x)$（例えば電子）を考えることにしよう．物理量としては例えばこの場の相関関数を考えることができるが，スカラー場との違いはフェルミオン単体での相関関数は常に消えることである：$\langle\psi(x)\rangle = 0$．これはローレンツ対称性が自発的に破れない限り正しい．実際に観測できる非自明な量はフェルミオンの足をつぶして得られるローレンツ不変な量の期待値，例えばフェルミオン凝縮（fermion condensate）と呼ばれる量 $\langle\overline{\psi}(x)\psi(y)\rangle$ である．このようにスカラー場以外の場については物理量と場の関係は単純ではなく注意が必要である．

このことは次の事実と両立している：2 次元時空では，ボソンを用いた記述とフェルミオンを使った記述が等価になることがある（これを**ボゾン化（bosonization）**[12], [13] と呼ぶ）．ここではその詳細は必要としないが，非常に大雑把にいって，これはフェルミオン ψ の 2 次 $\overline{\psi}\psi$ とボゾン ϕ を同一視するものであると考えればよい．既に述べたように，フェルミオンの非自明な期待値に現れるのはこの組み合わせであるので，この同一視のもとで全ての物理量をボゾンで置き換えることができる状況が存在し得るのは想像に難くないだろう．

状況はゲージ場の場合も同様である．ゲージ場 A_μ もローレンツ群のもとで非自明に変換するのでそれ自身の期待値は測定できない—非自明な観測可能量は常にローレンツ不変でなければならない．しかし，この場合はフェルミオンの時よりもさらに強い制限が付く：**ゲージ対称性はその定義によって記述の冗長性であり，我々が直接観測できる物理量は常にゲージ不変でなくてはならない**．例えば $\langle A_\mu A^\mu\rangle$ はローレンツ不変だがゲージ不変ではないので観測可能ではない．

勿論，記述の冗長性だからといってゲージ場に意味がないわけではない．ゲージ場はそれ自身非自明なダイナミクスを持つし，またゲージ場を含む観測可能な物理量を作ることはできる．その典型的なものが**ウィルソン・ライン（Wilson line）**である：

$$W_\gamma := \left\langle \mathrm{Tr}\, P \exp\left(i \oint_\gamma A \right) \right\rangle . \tag{1.6}$$

但しここで γ は閉路であり，P は一般に非可換なゲージ場を指数関数の肩に載せて展開したときに閉路にそって積の順序を定めることを意味する（path ordering）．ウィルソン・ラインはゲージ理論にとって重要な物理量であり，例えば閉じ込めの秩序パラメーター（order parameter）としての役割を果たす．

ウィルソン・ラインは観測可能量であるので，そこからゲージ場の情報を引き

出してくることが少なくとも原理的には可能である．但し，ここで微妙なのは，ウィルソン・ラインは**非局所的**（nonlocal）な物理量であると言うことだ．ここで，非局所的とはその物理量が時空の一点での場の値で定まるのではなく，時空の複数の点，あるいは一般にある領域での場の値を必要とすると言うことであり，今の場合は閉路 γ での全てのゲージ場の値が必要となることを指している．このようにゲージ場の観測可能量は非局所的でなければならない点でゲージ対称性を持たない他の場とは大きく異なる．

ゲージ対称性は冗長性であるということを再度強調しておこう．通常，対称性とは二つの異なる物理的状態が同じ性質を持つことを意味する．一方，ゲージ対称性はこの意味での対称性ではなく，ゲージは異なるが物理的に同じ二つの状態が存在することを意味している．実際，後から超対称ゲージ理論の文脈での具体例で見るように，双対な記述の組の片方ではゲージ場はなくなり，従ってゲージ対称性が消えてしまう状況さえ起こりうる．その意味ではゲージ対称性ではなく**ゲージ冗長性**（**gauge redundancy**）と呼ぶほうが適切かもしれないが，本書では読者の混乱を招かないためもっぱらゲージ対称性という用語を用いる．

この点に関連して，アハラノフ＝ボーム（Aharonov-Bohm）効果の説明には注意を要する．この効果はしばしば「量子力学においてはベクトルポテンシャル及びゲージ場が物理的に実在することをはっきりと実験的に示したものである」と説明されてきたし*13)，この説明を初めて聞いたとき筆者は大いに感銘を受けたものである．しかし，ゲージ場を冗長性と看做す立場を徹底し，アハラノフ＝ボーム効果の記述からゲージ場そのものを取り去り全てゲージ不変な量で記述することは可能である[14]．但しこのとき場の値は時空の一点では定まらず，無限遠方からその点までの径路の取り方に依存することになる．これは，非自明な磁束（(1.6) で定義したウィルソン・ループ）が存在すると言い換えてもよい．この立場からすると，アハラノフ＝ボーム効果はゲージ場の実在を示すと言うよりは**ゲージ場の非局所性**を示したものであると解釈されるべきである*14)*15)．

それではこのように厄介なゲージ場を何故考えなければいけないのだろうか？*16)

ゲージ場の存在は場の理論の伝統的な定式化，特にその明白な（manifest）**ローレンツ対称性**と**ユニタリティ**（unitarity），そして理論の**局所性**（locality）の為に本質的である．

---

*13) この文章の解釈は「実在」の正確な意味に強く依存する．以下で述べたのは，ゲージ場を必要としない記述が存在するということ．

*14) ゲージ場そのものは局所的な理論で描かれるが，ゲージ不変な量だけで全てを書こうとすると非局所的であるということ．

*15) ゲージ理論をゲージ不変な量，つまりウイルソン・ループのみを使って定式化しようとする考えには長い歴史がある（例えば [14], [15]）が，その非局所性を直接的に扱うのは（低次元を除き）現時点では容易ではない．

*16) 場の理論が漸近自由であるために非可換ゲージ場が必要であるという説明も見受けられる[16]が，既に述べたように場の理論は一般には低エネルギー有効場の理論でしかないのでこれは今日的には本質的とはいえないように思われる．

このことの説明は場の理論の教科書に見つかるが，ここではゲージ場の一つの現代的な理解について，（本論からは多少外れるが重要な点であるので）説明しておこう．それは，**ゲージ場は無質量（massless）スピン 1 の理論と有質量（massive）スピン 1 の理論を滑らかにつなぐために必要である**というものである（ここでの説明は [17] に近い）．

ポアンカレ群の表現から従うように，ゲージ場は無質量な場合はヘリシティー（helicity）$1, -1$ の二つを持つが有質量な場合は $1, 0, -1$ の三つが存在する（これは表現論の帰結であるが，直観的には無質量な粒子は光速で動いておりローレンツ変換しても静止させることができないことを意味している）．これは有質量と無質量で自由度が異ならないスカラー場の場合との大きな違いである．

しかし，我々は既に場の理論においてエネルギースケールが重要であることを見た．仮に有質量なスピン 1 の粒子が存在したとしよう．我々の世界には例えば有質量な W ボゾンが存在するのでこれは「実際的な」問題意識である．その質量 m はある特定の値を持ち，従って特定のエネルギースケールを定める．さて我々の考えるエネルギースケール μ をその質量スケールよりもずっと大きく取る極限を考えよう．但し，μ は有効場理論の記述が破れるスケール Λ_{UV} よりはずっと小さいものとしよう：$m \ll \mu \ll \Lambda_{\mathrm{UV}}$．このとき，粒子の質量はほぼゼロであると看做せる：$m \simeq 0$.

ところがこの極限はかなり微妙である．というのも，既に述べたように有質量と無質量では自由度の数が非連続的に異なるからである．このことの一つの現れとして，有質量スピン 1 の場（プロカ（Proca）場）のプロパゲーター（propagator）は運動量空間で

$$\Delta(p)_{\mu\nu} = -i\frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{1.7}$$

で与えられ（演習問題 1.2），これは $m \to 0$ の極限で発散することを挙げておこう．

この問題を解決するには無質量スピン 1 の場 A_μ が常に保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ を満たすカレント J^μ とカップルしているとすればよい．運動量空間にフーリエ変換すると保存則は $p^\mu J_\mu = 0$ なので，プロパゲーターの p^μ に比例する項からの寄与は消え (1.7) の $m \to 0$ 極限での発散はなくなる．

これが有質量スピン 1 の場 B_μ との自由度の違いの問題をどう解決したかをよりはっきりと見るには，B_μ を

$$B_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \tag{1.8}$$

と分解しよう．このとき θ の自由度はカレント J^μ との結合に利かない：$\int B_\mu J^\mu = \int A_\mu J^\mu$．$m \simeq 0$ でのプロパゲーターの発散がなくなったのはこの為であった．ここで分解 (1.8) には不変性

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda \,, \quad \theta \to \theta - \Lambda \tag{1.9}$$

が存在することに注意したい．これはスピン 1 の有質量理論での分解 (1.8) に存在する冗長性であり，無質量極限では θ の自由度はデカップルして A_μ のみがのこり，対称性 (1.9) がゲージ対称性として現れることになる．

参考までに，逆に無質量ゲージ場 A_μ を (1.8) の B_μ で置き換えることでゲージ場に質量を与えることができる．これをシュトゥッケルベルク機構（**Stückelberg mechanism**）と呼ぶ．

ここまで見てきたように，スカラー場以外の場については場そのものと実際に観測可能な物理量との間には大きなギャップが存在した．さらにギャップの存在は偶然的なものではなく根源的な物理的要請から必然的に現れてきたのであり，ゲージ場やゲージ対称性はその最たるものであった．我々はこの点をさらに発展させて，**自然界において観測可能な物理量が与えられたとしても，それに対応した理論・ラグランジアンが一意に定まるわけではない**と主張する．これにはいくつかの理由がある．

まず，一つのラグランジアンが与えられたとしても，その異なるパラメーター領域が同じ現実を表すことがある．

次に，別の場を持つ二つの（あるいは複数の）ラグランジアンが同じ物理量を記述することがある．

これをまとめて**双対性**（**duality**）と呼ぶ[*17)]．このような曖昧さが存在し得る基本的な理由は，ラグランジアンの記述に用いられる場，特にゲージ場自体が直接観測可能でないことである．

最後に，現実に存在する場の理論にはラグランジアンを持たないものが存在すると考えられている（ラグランジアンを持たないと信じられている場の理論の例，**6 次元 (2, 0) 理論**（**6d (2, 0) theory**）については後に第 6.2 節でコメントする）．場の理論をラグランジアンを使って定義した我々の図式 (1.1) は実はそもそも場の理論の定義として不十分であるのだ．一般に，ラグランジアンが無くても演算子やその相関関数，さらには S 行列を使って物理量を定義することはできる．また共形場理論（特に 2 次元）のように，対称性だけから物理的性質に強力な制限が付いてしまう状況も存在するのだ．

以下では双対性の具体例を見ていくことにしよう．双対性の例には例えば 2 次元イジング・スピン系が挙げられるし，後に第 2 章において 3 次元の場の理論での簡単な双対変換 (**粒子・ボーテックス双対性** (**particle-vortex duality**)) を紹介する．以下では超対称性を持つ 3, 4 次元の場の理論における双対性の具体例を見ていくことにしよう．これらの例では超対称性の制限により双対性の

*17) 本書よりもより広い意味で文脈で双対性について議論したレビューとして，[18] が参考になる．

精密な理解が可能になっている．

1.3.2 4次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の S 双対

4次元超対称ゲージ理論の双対性で最も有名なものの一つが **4次元 $\mathcal{N}=4$ 理論（4d $\mathcal{N}=4$ theory）** の **S 双対（S-duality）**，さらには **$SL(2,\mathbb{Z})$ 双対（$SL(2,\mathbb{Z})$ duality）** である．

ゲージ群 $U(N)$ を持つ4次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論を考えよう．ここでは4次元 $\mathcal{N}=4$ 対称性とは何であるかの正確な理解は必要としない．ゲージ場に加え様々な場（ボソンやフェルミオン，ゲージ場のスーパーパートナー）を含んだ理論であり，対称性が高くゲージ群を決めることでラグランジアンが完全に決まってしまうという程度の理解で十分である．

この理論には二つの実パラメーターが存在し，ゲージ結合定数 g 及びテータ角 θ である．このときラグランジアンは次の項を含む*18)：

$$
\begin{aligned}
L_{\text{運動項}+\text{テータ角}} &= -\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{\theta}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\right]\\
&= -\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{g^2}F\wedge *F+\frac{\theta}{8\pi^2}F\wedge F\right] . \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

このときテータ角 θ を 2π だけシフトするとその変化は

$$
\delta L_{\text{運動項}+\text{テータ角}} = -2\pi\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}\,(F\wedge F)\in 2\pi\mathbb{Z}\ . \qquad (1.11)
$$

但し最後は**第2チャーン指標（second Chern character）**

$$
\mathrm{ch}_2(F) := -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\,(F\wedge F) \qquad (1.12)
$$

の閉多様体での積分が整数であることを用いた（関連した議論は第7.1.1節でも再度登場する）．従って，作用 $e^{iL_{\text{運動項}+\text{テータ角}}}$ は不変であり，θ は周期 2π で同一視されることになる．

二つのパラメーター g,θ をまとめた**複素化された結合定数（complexified gauge coupling constant）** τ を

---

*18) 本書では標準的な微分形式の記号を用いる．例えば 2-form である場の強さ F については

$$
F=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu\ ,\quad dF=\frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu\nu}\,dx^\rho\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\ .
$$

ここで $\wedge$ は微分形式のウェッジ積であり，$dx^\mu\wedge dx^\nu=-dx^\nu\wedge dx^\mu$ を満たす．特に4次元では

$$
dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\sigma=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^3.
$$

$*$ はホッジ双対（Hodge dual）であり

$$
*(dx^\mu\wedge dx^\nu)=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}dx_\rho\wedge dx_\sigma\ ,\quad (*F)_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\ .
$$

$$\tau := \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi}{g^2} i \tag{1.13}$$

によって定義しよう．定義によって $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ である．このとき，次の事実が成り立つことが予想されている：

4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ ゲージ理論の $SL(2, \mathbb{Z})$ 双対性

4 次元 $\mathcal{N} = 4$ で複素ゲージ結合定数が τ の理論と，同じラグランジアンで複素ゲージ結合定数の値が $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換された

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (ad - bc = 1 \text{ かつ } a, b, c, d \in \mathbb{Z}) \tag{1.14}$$

の理論は，等価な物理を記述する[19]．

行列 $\{-I_{2\times 2}\}$ は複素ゲージ結合定数 τ に自明に作用するので τ に非自明に作用する群は $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \{\pm I_{2\times 2}\}$ である．

この双対性はラグランジアンを定めた時に，そのパラメーターと物理量との対応に曖昧さが残る例である．ここでは先を急ぐので詳細は述べないが，大雑把には電場 E と磁場 B を混ぜる変換での対称性を主張していると理解すればよい．

この予想についてはいくつものチェックがなされており予想の正しさを積極的に疑う研究者は現在では殆どいない．しかし今でもその予想に厳密な証明はなく，その検証は現在でも続いている．例えば (1) ウィルソン・ループとその S 双対であるト・ホーフトループ（'t Hooft loop）の相関関数の期待値の一致[20] (2) $S^1 \times S^3$ 超対称分配関数（超共形指数）[21], [22]の一致[23], [24]やその $S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_r$ への拡張[25]での一致[26]等は比較的最近であるうえ，その一致には（特に一般のゲージ群の場合には）完全な証明が付けられていない部分も多い．

$SL(2, \mathbb{Z})$ の次の二つの元を考えよう：

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

こうして定義された S, T は次の関係式を満たす：

$$S^2 = -I_{2\times 2}, \quad (ST)^3 = I_{2\times 2}. \tag{1.16}$$

また (1.16) から $(TS)^3 = 1$ も示せる．

実は，S, T は $SL(2, \mathbb{Z})$ の生成元であり，$SL(2, \mathbb{Z})$ の任意の元 φ は

$$\varphi = T^{n_1} S T^{n_2} S T^{n_3} \ldots S T^{n_k} \quad (n_i \in \mathbb{Z}) \tag{1.17}$$

と書くことができる．

このことを証明するには次のようにすればよい*19)．行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $c \neq 0$ とする．このとき T^n 変換（$n \in \mathbb{Z}$）

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

により $|a|$ の値を $|a| < |c|$ とできる．この後 S 変換

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

により a と c を入れ替えられるので結局 $|c|$ の値を小さくすることができた．これを有限回繰り返すと $c=0$ となり，このとき $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列は T^n の形に書ける．

さて，$SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性の主張はその生成元である S, T についての主張に帰着した．これらに対応する複素ゲージ結合定数の変化は

$$S : \tau \to -\frac{1}{\tau}\,, \quad T : \tau \to \tau + 1 \tag{1.18}$$

である．T 変換は $\theta \to \theta + 2\pi$ であるのでテータ角の周期性を表している．一方，S 変換は遙かに非自明な変換であり，例えば簡単のため $\theta = 0$ と取ると $g \to g^{-1}$ である．これは弱結合を強結合に送る変換であり，弱結合展開である摂動論の枠内では捉えられない．

同様の S 双対は 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論でゲージ群が可換 $U(1)^n$ の時も知られており，このときの双対性の群は $Sp(2n, \mathbb{Z})$ である（$n = 1$ の時，$Sp(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})$ である）．このことは第 5.2.2 節で用いられる．

また，後の第 5 章ではゲージ群が $SU(N)$ の時の S 双対も用いる．このとき，S 変換はゲージ群 $SU(N)$ を別のゲージ群 $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ に入れ替えることが知られている[27]．但し，$\mathbb{Z}_N$ は $\omega\,\mathrm{Id}_{N\times N}(\omega^N = 1)$ で与えられる $SU(N)$ のセンター（他の全ての元と交換する元）であり，例えば $SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ である．S 変換の精密な議論のためには $SU(N)$ と $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ の違いは重要であるが，本書ではこの点はさほど気にしなくてもよい．

1.3.3　4 次元ザイバーグ双対性

次に，ラグランジアンが異なる二つの理論が同一の物理に対応する例を見てみよう．このような例は 90 年代に数多く見いだされたが，その中でももっとも典型的なのは 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 理論に対応する**ザイバーグ双対性**（**サイバーグ双対性，Seiberg duality**）[28]である．

本書ではザイバーグ双対の主張自体はほとんど必要としないが，手短にまとめると主張は次の通りである．4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 QCD を考え，ゲージ群は

*19)　以下の操作は有理数 a/c の連分数展開に他ならない．

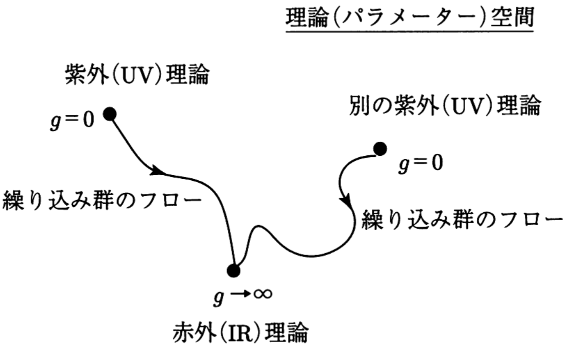


図 1.2 ザイバーグ双対性は，二つの紫外理論（ラグランジアン）が繰り込み群のフローのもとで同じ赤外固定点に流れ込むことを主張する.

$SU(N_c)$，またフレーバーの数を N_f としよう．つまり，ゲージ群 $SU(N_c)$ のもとで基本表現 $\boldsymbol{N_f}$ (反基本表現 $\overline{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{f}}$) で変換する N_f 個のカイラル超場 $Q^{i=1,\ldots,N_f}$ ($\overline{Q}_{i=1,\ldots,N_f}$) を考える．これが一つの理論である.

もう一つの理論では，まず $SU(N_f - N_c)$ ゲージ群，フレーバー数を N_f とする：ゲージ群の基本表現及び反基本表現で変換するカイラル超場を今度は $q^{i=1,\ldots,N_f}$ ($\overline{q}_{i=1,\ldots,N_f}$) と書こう．さらにここにゲージ変換のもとで自明に変換する場（メソン）$M^i{}_j$ を考え，$q, \overline{q}, M$ から構成されたスーパーポテンシャル $W = \mathrm{Tr}(\overline{q}_i M^i{}_j q^j)$ を加える．これがもう一つの理論である.

コンフォーマル・ウインドウ (conformal window) と呼ばれる条件 $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ を仮定しよう．このとき，二つの理論，つまり 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称 $SU(N_c)$ QCD で N_f フレーバーの理論と，4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称 $SU(N_f - N_c)$ QCD で N_f フレーバーの理論に適当に場（メソン）やスーパーポテンシャルを加えた理論は繰り込み群のもとで同一の強結合繰り込み群固定点にフローすると考えられている．つまり，二つの理論は赤外固定点で一致する.

ここではむしろ次の 2 点が重要である．まず，この双対性は物理現象が与えられたときにそれに対応するゲージ群の概念が一意に定まらず，曖昧さが存在することの良い例になっているということである．ゲージ群が $SU(N_c)$ の理論はゲージ群が $SU(N_f - N_c)$ の理論と等価な物理を記述しており，ゲージ群はそのランクでさえも異なっている．もう一つは，ここでの双対性は紫外でのラグランジアンレベルでの直接な等価性ではなく，繰り込み群で流れていった先にある**赤外固定点の周りでの双対性である**と言うことである（図 1.2).

1.3.4 3 次元ミラー対称性

さて，最後に本書で重要になる 3 次元超対称性理論での双対性の例を説明しよう．それは，**3 次元ミラー対称性 (3d mirror symmetry)**[29] と呼ばれるものである．これにはいくつものバージョンがあり，本書では例えば 3 次元 $\mathcal{N}=4$

超対称性を持つ時のミラー対称性を第 5.3 節で議論する．

ここではミラー対称性の一例として，$\mathcal{N}=2, N_f=1$ 超対称 QED と XYZ 模型との双対性（ここでは **2–3 ミラー対称性（2–3 mirror symmetry）** と呼ぶ*20)）について述べることにしよう．

3 次元超対称場の理論におけるミラー対称性は特に数学のとの関連で有名な 2 次元のミラー対称性と密接に関係している．ゲージ群が可換の時，3 次元ミラー対称性の理論の組のそれぞれを 2 次元に次元還元すると，2 次元のミラー対称性が得られることを示すことができる[30]．

双対性の片側は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ $N_f=1$ **超対称 QED（supersymmetric QED，SQED）** である．ここで超対称 QED とはゲージ群が $U(1)$ のゲージ理論であり，フレーバーの数 N_f が 1 であるとはチャージ +1 の場（q と書く）と −1 の場（$\overline{q}$）が一つずつ存在することを意味する．

一方，もう一つの理論は **XYZ 模型（XYZ model）** と呼ばれる．これはゲージ理論ではなく，ただ三つのカイラル超場 X, Y, Z からなり，スーパーポテンシャル $W = XYZ$ を持つ．但しここで X, Y, Z という名前は単なる慣習であって特に深い意味はない*21)．

3 次元 2–3 ミラー対称性は，これら二つの理論が等価であることを主張する．

3 次元 2–3 ミラー対称性

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 QED と，3 次元 $\mathcal{N}=2$ XYZ 模型は等価である*a)．特に，二つの理論は繰り込み群のもとで同一の赤外固定点にフローする．

*a) 二つの理論の等価性は赤外固定点から紫外に繰り込み群のフローを遡っても成り立つと考えられている．

この例はゲージ理論が非ゲージ理論と双対であり得ることを示しており，物理現象に対してゲージ群が一意に定まらないことを明確に示す良い例である．これは物理的には，3 次元場の理論における粒子とボーテックスの入れ替えについての双対性を主張しており，4 次元理論において電場と磁場を入れ替えた双対変換の 3 次元版である（第 2 章参照）．また，以下第 3 章及び第 4 章においてこの予想の証拠をより詳細に説明する．先走るが，この双対性は量子ダイログ関数のペンタゴン恒等式や双曲幾何における**パヒナームーブ（Pachner move）**と対応しており本書の議論のために極めて重要である．

*20) これは後に述べる 3 次元多様体との関連において便利な名前であるがスタンダードな用語法ではないので文献を参照する際には注意が必要である．

*21) 念のため，ここでの XYZ 模型はスピン鎖の同名の模型とは全く別である．三つある場をアルファベットで X, Y, Z と表したのが定着した．

1.4 6次元 (2,0) 理論のコンパクト化

ここまで超対称場の理論の双対性の例を幾つか述べてきた．同様の双対性の例は多数文献で知られているのでそれらを細かくあげていけばそれだけでこの本が終わってしまうだろう．既に述べてきたように双対性の一つの起源は場の理論と物理量との間の齟齬であり，双対性が存在し得ること自体は不思議ではない．また例えば物理量を計算することで双対性のチェックを積み重ねていくこともできる．

しかし，我々が問題にしたいのはより深くゲージ理論の双対性をどうやって理解することができるかどうかである．ここまで議論してきた双対性の例では，ゲージ結合定数が大きなパラメーター領域を考える必要があり，そこではファインマン図等の摂動展開による計算方法は有用ではない．より直接的に，そして概念的にゲージ理論の双対性を理解することはできないだろうか？

ここで紹介したいのは双対性を幾何の主張に翻訳するというアプローチである．つまり，ゲージ理論に対応する幾何的対象を考え，ゲージ理論の双対性を幾何側での性質に読み替えることである．これは翻訳ではあるが時に複雑な現象を単純な主張にうつすことになる．

このアプローチは歴史的には超弦理論によって強く動機づけられてきたものであるが，本書で述べるようにこのアプローチ自身には必ずしも超弦理論を必要としない．

幾何的問題に翻訳するアプローチを4次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の S 双対の場合に説明しよう．この場合に幾何への翻訳は次の主張に基づく：**整数 $N(>1)$ で指定されるとある6次元の理論が存在し，その理論を複素構造 τ を持つ2次元トーラスにコンパクト化したとき，残りの4次元方向に現れる理論が4次元 $SU(N)$ ゲージ理論を与える．さらに，4次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の複素ゲージ結合定数 τ は2次元トーラスの複素構造のパラメーター τ と同一視される．**

ここで述べられた6次元の超対称ゲージ理論は．6次元の A_{N-1} 型 (2,0) 理論と呼ばれる共形場理論であり，その存在は超弦理論からの考察によって示唆されている．この理論の性質についてはさらに第6章でコメントするが，ここではその詳細は重要ではない．重要なのは4次元複素ゲージ結合定数と2次元トーラスの複素構造の同一視である．

複素構造（complex structure）とは，直感的には大きさの定まった多様体を変形する自由度のことと思えばよい．あるいは，より数学的には，多様体の各局所近傍座標において，複素座標 z の入れ方を定めるものである．

今の場合，複素構造 τ を持つ2次元トーラスは，複素平面 $\mathbb{C}$ をその座標 z について $z\sim z+1\sim z+\tau$ の同一視のもとで得られるものと考えればよい．トーラスに向きを定めておけば τ は $\mathrm{Im}(\tau)>0$ を持つとしてよい．

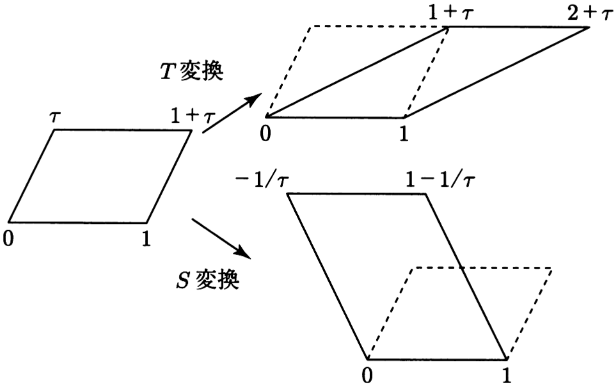


図 1.3 2 次元トーラスの複素構造は $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ を満たす複素数 τ で与えられ，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換で同一視された τ は同じ複素構造を与える．

こうして複素トーラスの複素構造は $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ を満たす複素数 τ で記述されるが，全てのその τ の値が別の複素構造を記述するわけではなく，次の $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換は複素構造を保つ（図 1.3）：

$$\tau \to \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\,. \tag{1.19}$$

実際，(1.19) のもとで τ を変換させたとき，それに応じて複素座標 z も $z' = (c\tau + d)z$ と変換すれば $z' \sim z' + 1 \sim z' + \tau$ が導かれる．この変数変換は z の複素共役 $\bar{z}$ を含んでいないので複素構造を保っている．

ここで $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換のうち行列 $-I_{2\times 2}$ は τ に自明に作用するので，それを割引くと非自明に作用するのは $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I_{2\times 2}\}$ である．この群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ は T^2 の**写像類群**（**mapping class group**）$\mathrm{MCG}(T^2)$，つまり T^2 からそれ自身への微分同相写像のアイソトピー類でもある：

$$\mathrm{MCG}(T^2) = \frac{\mathrm{Diff}\,(T^2)}{\mathrm{Diff}_0(T^2)} = PSL(2,\mathbb{Z})\,. \tag{1.20}$$

主張の一つは，コンパクト化に現れた 2 次元トーラスのこの $PSL(2,\mathbb{Z})$ 変換が，コンパクト化の結果現れた 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論にも反映されている（$PSL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を持つ）ということである．このように，**超対称ゲージ理論の深遠な双対性の主張が，比較的単純な幾何的主張から導出されたことになる**．言い方を代えると，ゲージ理論と幾何の対応を仮定すればゲージ理論（この場合は 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論）の詳細を知ることなくその非摂動的性質が導かれてしまうのである．これが幾何的アプローチの強みである．

もっとも，ここまでの説明は多少強引なところがないわけではない．既に述べたように，6 次元の場の理論の存在を（超弦理論を持ち出さずに）直接的に場の理論の範疇で示すことはなされておらず，上の議論を逆にして 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論の S 双対をもって 6 次元理論の存在の証拠とすることも多いからである．

しかし，ひとたび6次元理論の存在を受け入れてしまえば，そこから様々な帰結が導かれることになる．例えば，コンパクト化する多様体をT^2からより一般の多様体に変更するとどうなるのだろうか？ 残りの次元にはどのような理論が現れるのだろうか？ この点については90年代から研究されてきた[31]が2009年頃から近年大きな進展があった[32]．

例えば，多様体として2次元リーマン面$\Sigma = \Sigma_{g,h}$を考えよう．但しgはリーマン面の種数（genus），hは**パンクチャー（puncture）**の数である．パンクチャーは穴のことであるが，後に第8章で議論するように有限の大きさの穴を考える．また，種数も一種の穴であって紛らわしいのでpunctureは本書ではそのままパンクチャーと表記しよう．

第4章で述べるように，超対称場の理論を曲がった多様体上で考える一つの方法として**トポロジカル・ツイスト（topological twist）**（第6章を参照）を考えることができる．このツイストの取り方によって残りの4次元には$\mathcal{N}=2$理論または$\mathcal{N}=1$理論が現れることが知られており，特に4次元$\mathcal{N}=2$理論の場合はよく調べられている．このときもゲージ理論と幾何の対応はT^2の時と同様であり，**リーマン面Σの写像類群が4次元$\mathcal{N}=2$理論の双対性のなす群として解釈できる***22)ことが知られている[32],[33]．

本書で主として考えたいのは6次元理論を3次元多様体Mでコンパクト化した時の状況である．本書で考える状況では残りの3次元方向には$\mathcal{N}=2$の超対称性が残る．この3次元$\mathcal{N}=2$理論を3次元多様体Mの幾何，すなわち3次元多様体論を使って調べるのが本書の目的である．より物理的には3次元多様体には複素化されたゲージ群を持つ**チャーン＝サイモンズ理論（Chern-Simons theory）**（第9章）が現れることになる[34],[35]．

歴史的には2次元多様体のコンパクト化が最初に議論され，その後それが3次元多様体のコンパクト化の場合に一般化された．また2次元多様体のコンパクト化の場合の方が文献も多い．また2次元多様体の幾何（第8章参照）よりも3次元多様体の幾何（第9章）の方が複雑であり，物理学者には馴染みも薄い．

しかし実際のところ3次元多様体のコンパクト化の場合の方が状況はシンプルである側面も多い．例えば第9章で説明するように3次元ゲージ理論と3次元多様体の間の対応関係はかなり直接的であり，両者の構成要素やその計算において各々のステップごとに対応が存在する．一方，4次元ゲージ理論と2次元理論との対応はより込み入っており，4次元側と2次元側の計算の比較にはしばしば数学的にかなり非自明な等式を必要とする．

本書は3次元$\mathcal{N}=2$理論と3次元チャーン＝サイモンズ理論の対応の解説を目的とするが，その説明の過程で4次元$\mathcal{N}=2$理論及び2次元多様体（上のタイヒュミュラー理論）との関連も明らかになるような説明を心がけた．

---

*22) 一般のリーマン面の場合には，写像類群は必ずしも強結合を弱結合に変換するわけではなく，強結合の理論を別の強結合の理論に送ることになる．従って，この双対性は通常の意味でのS双対ではない．

表 1.1 コンパクト化する多様体及びツイストの方法を変えることで 6 次元理論から様々な次元と超対称性を持つ場の理論を作り出すことができる．以下では多様体が一般の場合（より正確には一般のホロノミーを持つ場合）を考えたが，より特殊な多様体の場合にはより大きな超対称性を持つ場の理論を構成することができる．この表のうち本書で議論するのは（1）2 次元多様体にコンパクト化して得られる 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論及び（1）3 次元多様体にコンパクト化して得られる 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の 2 種類のみである．コンパクト化やツイストについては第 6 章で説明される．

コンパクト化する多様体	残り次元に現れる超対称場の理論
2 次元多様体	4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論
	4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論
3 次元多様体	3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論
	3 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論
4 次元多様体	2 次元 $\mathcal{N}=(0,2)$ 理論
	2 次元 $\mathcal{N}=(1,1)$ 理論
	2 次元 $\mathcal{N}=(0,1)$ 理論

本書での議論は 6 次元理論の特定のコンパクト化及びそれから現れる超対称場の理論に限定される．しかしそこに現れる幾つかの考え方，例えばゲージ化の反復による場の理論の構成や赤外での理論の双対性，境界・ドメインウォール上の場の理論やその演算子解釈，場の理論の空間における幾何構造等々はより一般的な場の理論にも適用することができると期待される（第 10 章参照）．

1.5 ゲージ化とゲージ理論の結合・分解

ここまで述べてきたのは場の理論の双対性であり，またそれをどう理解するかであった．しかし本書で議論したいのは単に二つの場の理論の間の双対性にとどまらない：一般に複数の場の理論が同じ物理を記述する状況を考えたい．これを本書では**双対性のウェブ（duality web）**と呼び，その複数の場の理論のひとつひとつを**双対枠（duality frame）**と呼ぶことにする．

なお，双対性（duality）という名前の dual が示すように，双対性自体はしばしば二つの理論の等価性に限定して用いられることもあり，そのとき例えば三つの理論の関係はトライアリティ（triality）と呼ばれる．本書では双対性をそれよりも広く，（複数の）異なる理論の等価性の意味で用いる．

ここまで議論してきた通常の意味での双対性はより豊かな場の理論の双対ウェブのなかの氷山の一角である．ここで本質的な役割を果たすのが**ゲージ化（gauging）**の考えである．

1.5.1 理論の結合と分割

まず，ゲージ化あるいはその逆，**非ゲージ化**（**un-gauging**）とは何であるかをおさらいしておこう．理論に大域対称性が存在したと仮定しよう．さらに大域対称性に対応する背景ゲージ場 $A_\mu^{背景}$ が存在したとしよう．ここで背景場とはラグランジアンに外場として導入された場であり，その場の値については径路積分は行わず固定される．

背景ゲージ場の例としては実験装置に加えられた磁場を考えるとイメージしやすい．磁場の値は装置の外にいる観察者が自由に変化させてその応答をみることができ，装置の中を記述する理論のダイナミクスとは独立なパラメーターである．

より具体的には背景ゲージ場と大域対称性のカレント J^μ との結合項

$$L_{結合項} = \int J^\mu A_\mu^{背景} \tag{1.21}$$

がラグランジアンに存在すると仮定する*23)．

これは場の理論の相関関数の計算で形式的に導入する外場と同様であるが，ラグランジアンのローレンツ不変性のために J はベクトルの足 μ を持つ．またさらにゲージ変換 $\delta A_\mu^{背景} = D_\mu \Lambda$ のもとでのラグランジアンの不変性のために $D_\mu J^\mu = 0$ が要請される．つまり，J^μ は保存カレントでなくてはならない．

さて，この設定のもとで大域対称性をゲージ化するとは，背景ゲージ場 $A_\mu^{背景}$ に対する運動項 $-\int \frac{1}{2g^2} \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ をラグランジアンに足し，この大域対称性をゲージ対称性に格上げすることである．このとき外場であった $A_\mu^{背景}$ はダイナミカルな場となり，径路積分ではその配位の全てにわたる足し上げが行われる．

本書では超対称性理論を考えるので，この手続きは全て超対称性を保つようスーパーパートナーを込めて行う必要がある．例えばゲージ場の運動項にはフェルミオン（ゲージーノ）の運動項が伴わないといけない．

逆にゲージ群及びそのゲージ場 A_μ を持つとき，非ゲージ化を定義することができる：ゲージ場の運動項をラグランジアンから取り除き，ダイナミカルなゲージ場を背景ゲージ場に取り替えればよい．

このゲージ化の概念は我々が場の理論を勉強するときにほとんど無意識に行っているものである．例えば量子色力学（QCD）ではクォークと反クォークが $SU(3)$ ゲージ群のもとで非自明に変換するが，これはクォーク達が自由フェルミオンである理論をゲージ化したものと看做すことができる．もっと一般に，全ての（ラグランジアンを持つ）ゲージ理論はまず背景ゲージ場を考えそれをゲージ化したものと看做すことができる．

現実世界ではゲージ化が全てではなく，例えば物質場同士の結合（例えば湯川結合）

*23) 既に見たように，これは無質量と有質量スピン 1 粒子を連続的につなぐために必要なのであった．

も重要であり，実際本書ではこれらの相互作用も欠かせない．但し，物質場の結合はしばしば対称性を破るので，対称性により許される項は全て生成されるものとする有効場の理論の考え方に従うと，物質場の相互作用の存在の有無も大域対称性の存在に読み替えることができ，対称性がどう変化するかを考えておけば十分である．

相互作用項の有無さえ決まってしまえば，その相互作用の強さは赤外固定点では（マージナル変形の自由度を除いて）特定の値に決まってしまうことが期待できるので，大域対称性とそのゲージ化に着目したこれまでの議論は実はほとんど一般性を失っておらず，ただ大域対称性の相互作用項による明白な（explicit）破れを考えればよいということになる．

それとは別に，対称性は理論の力学によって自発的に（spantaneous）に破れることがある．これはとても重要な現象であるが，ここではそのような理論の性質以前の問題として，理論そのものの定義を問題にしているのでひとまず考えないことにする．

ここまでゲージ化を説明してきたが，それは場の理論を勉強するものならば大なり小なり無意識に行っていることであった．しかしそれではここまでの議論の御利益はなんだろうか*24)？ この疑問に答える前にもう少し抽象的な議論を続けよう．

ゲージ化の特別な例として次の例を考えたい．二つの理論 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が存在し，それらがそれぞれ大域対称性 $G_1 \simeq G_2 \simeq G$ を持つとしよう．このとき，その対角部分のゲージ $G_{対角} \subset G_1 \times G_2$ 対称性をゲージ化することを考えよう．このゲージ化によって，もともと相互作用はなく独立であった二つの理論はゲージ化されたダイナミカルなゲージ場を通じて相互作用を行うようになり，二つの理論は今や一つの理論と看做すことができる．これを $\mathcal{T}_{1\cup 2}$ と書くことにしよう．

逆に理論 $\mathcal{T}_{1\cup 2}$ が与えられたときゲージ群 G を非ゲージ化すればこの理論は二つの理論 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ に分解したことになる．

ここで二つの理論が同じ大域対称性を持つとしたが，一般に二つの大域対称性 G_1 と G_2 が別のものであってもそれが共通の部分群 H を持つ限り H をゲージ化することによって同様の操作を行うことができる．

このように，ゲージ化及び非ゲージ化を行うことによって二つの理論を一つに結合したり，あるいは逆に一つの理論を二つに分割することもできる（図 1.4）．

ここで興味深いのは，ゲージ化の操作を許すと通常の意味でのラグランジアンで記述される理論の範疇を超えてしまうことがあるということである．

例えば次章以降で議論する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論では，**トポロジカル $U(1)$ 対称性**（**topological $U(1)$ symmetry**）とそのゲージ化を議論する（第 3 章）．この対称性は，ラグランジアンから間接的に読み取ることができるが**ラグランジアンに現れる場には自明に作用する**．あるいはラグランジアンレベルでは（明

*24) ゲージ化の概念を有用に用いた例として，トフーフト（’t Hooft）によるアノマリー・キャンセレーション（anomaly cancellation）の議論[36]を挙げることができる．

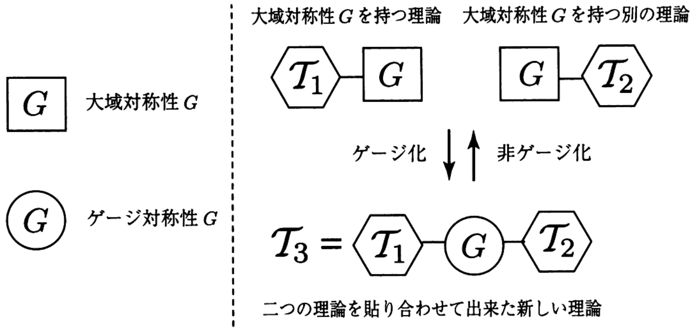


図 1.4 大域対称性 G を持つ二つの理論 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が存在するとき，その $G \times G$ 対称性の対角部分 $G_{\text{対角}} \subset G \times G$ をゲージ化することでより大きな理論 $\mathcal{T}_3$ を作ることができる．逆に $\mathcal{T}_3$ のゲージ群 G を非ゲージ化することで $\mathcal{T}_3$ を二つの理論 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ に分解できる．

白には）読み取ることができない大域対称性が存在することもある（例として第 5 章で議論する $T[SU(N)]$ 理論の $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ 対称性がある）．そのような対称性があってもそれを概念的にはゲージ化できるが，ラグランジアンにはその対称性は存在しないのでそうして構成された理論はラグランジアンを一般には持たない．

それではこのゲージ化の概念と双対性とはどう結び付くのだろうか？ まず双対な理論の組 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が存在したとしよう．さらにこれらが（アノマリーを持たない（non-anomalous））大域対称性 G を持つとしよう—双対な理論では大域対称性は一致するべきなので，片方の理論が G を持てば自動的にもう片方にも G が存在する．

さて，ここでさらに別の理論 $\mathcal{T}_3$ が存在し，これも大域対称性 G を持つとしよう．このとき，$\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_3$，あるいは $\mathcal{T}_2$ と $\mathcal{T}_3$，を G のゲージ化によって結合することができる—出発点の $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が等価であったので，この結合によって得られた $\mathcal{T}_{1\cup3}$ 及び $\mathcal{T}_{2\cup3}$ も等価であると期待される．

こうして新しい双対性，$\mathcal{T}_{1\cup3}$ 及び $\mathcal{T}_{2\cup3}$ の双対性を得ることができた．

この双対性はもともとの双対性とさほど変わっているわけではない．しかし，この考えを組み合わせることでもっと双対性のバリエーションを増やすことができる．

理論 $\mathcal{T}_{1\cup2\cup3}$ を考える．理論 $\mathcal{T}_{1\cup2}$ と $\mathcal{T}_4$ が双対，また理論 $\mathcal{T}_{2\cup3}$ と $\mathcal{T}_5$ が双対だと仮定しよう．このとき

$$\mathcal{T}_{4\cup3} \simeq \mathcal{T}_{1\cup2} \cup \mathcal{T}_3 \simeq \mathcal{T}_{1\cup2\cup3} \simeq \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_{2\cup3} \simeq \mathcal{T}_{1\cup5} \tag{1.22}$$

となるので理論 $\mathcal{T}_{4\cup3}$ と $\mathcal{T}_{1\cup5}$ が等価であると分かる．

一般に，複数のゲージ化によって作られた巨大な理論が存在すれば，非ゲー

ジ化して得られるその部分理論に双対変換を適用してから再度ゲージ化を行うことによって複数の巨大な理論の間の双対性のウェブを考えることができる．あるいは，理論に相互作用項を加えることによって大域対称性をその部分群に破ってやることもできる．こういった操作を繰り返すことによって複数の等価な理論の組を作り出すことができる．

注意深い読者のために補足をしておこう：ここまでの主張には正確には微妙な点が存在する．それは，双対性の一部（例えば既に議論したザイバーグ双対性）は赤外固定点での双対性であってラグランジアンレベルで直接に成り立つ双対性ではないと言うことである．一般にゲージ化の操作によって新しいゲージ結合定数が導入されそれもまたフローするので繰り込み群のもとでの振る舞いが変わり，ゲージ化する前に成立していた双対性が破れてしまう可能性は否定できない．但し，本書で議論する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の例では S_b^3 分配関数の解析や 3 次元多様体との対応から双対性が強く示唆されており，それを疑う積極的な証拠は存在しない．

1.5.2 多様体の分解と結合

ここまでゲージ化によって理論を結合・分解することについて説明してきた．それではこれを幾何的に理解することができるだろうか？

ここまではかなり一般の理論について述べてきたが，幾何的描像を導入するために，理論は超対称性を持つゲージ理論でかつ 6 次元理論の多様体上でのコンパクト化で与えられるとしよう．6 次元理論を（例えばトーラスやシリンダーに）コンパクト化するとゲージ群が現れるので，ゲージ化，従ってゲージ理論の結合・分解は多様体の分解・結合に対応すると期待するのはそれほど突飛な発想ではない．

実際，この主張を発展させてまとめると次のようになる：**超対称ゲージ理論の双対枠の選び方は多様体の異なる分解の仕方に対応する．場の理論の非自明な双対性は，幾何サイドで分解が一意では無いことことに読み替えられる．さらに，場の理論の性質，例えばそのパラメーターや真空の情報は多様体についての幾何的情報に読み替えられる．**

次章以降で目標とするのは具体例についてこの標語に肉付けしていくことである．その為に，まず 3 次元場の理論の世界へと足を踏み入れることにしよう．毎日を 4 次元時空の中で過ごしている読者の皆さんは，「低次元」であるのに驚くほど豊かな世界と出会うことになる．

演習問題

1.1 [♦♦]（ボゾン化）2 次元のフェルミオンとボゾンの変換（ボソン化）について調べ，まとめよ．

1.2 [♦]（プロカ場のプロパゲーター）有質量スピン 1 粒子のプロパゲーター (1.7) を導け．（ヒント：場 B^μ は自由度 4 を持つので自由度 3 を持つスピン 1 の場（ポアン

カレ群の既約表現）を得るにはローレンツ不変な条件を一つ課してやる必要がある：$\partial^\mu B_\mu = 0$. ラグランジアンは B^μ から作られるローレンツ不変な汎関数でありこの条件 $\partial_\mu B^\mu = 0$ 及びクライン＝ゴルドン方程式 $(\Box + m^2)B_\mu = 0$ と両立する運動方程式を導くものでなければいけない（ここで，m は質量）．これよりラグランジアンが

$$\mathcal{L}_{プロカ} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) - \frac{m^2}{2} B^\mu B_\mu \tag{1.23}$$

と求まる.）

1.3 [♦♦]（スピン 2 粒子）演習問題 1.2 及び本文での議論を無質量及び有質量スピン 2 の粒子に適用すると，その連続性からどのような条件が得られるか？

1.4 [♦♦]（場の理論の定式化）場の理論の定式化には本章で述べられたラグランジアンによる方法以外にどのようなものが可能だろうか？

1.5 [♦]（超対称場の理論の双対性の例）本書で述べた以外の超対称場の理論の双対性にはどのようなものが知られているのだろうか？ 文献を調べて 2，3 例を挙げよ．それを使ってゲージ化・非ゲージ化の操作によって双対性のウェブを作ることができるだろうか？

第 2 章
3次元場の理論の愉しみ

前章ではゲージ化の概念を使って場の理論を貼り合わせる一般論を展開した．ここからは 3 次元場の理論の場合に特化して考えることにしよう．3 次元の場合には，場の理論の貼り合わせの概念が特に自然であり，またより一般でもある．本章の中でも特に $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換の概念は次章以降で重要である．

2.1 トポロジカル $U(1)$ 対称性

2.1.1 そもそも何故 3 次元か？

本書では以下専ら場の理論として 3 次元の場の理論を考えることになる．しかし，一部の読者はこの文を読んだ途端に先に進めなくなるかもしれない．我々の宇宙は，少なくとも我々が体感できる限り 4 次元なのにそもそも何故（一見）現実離れした 3 次元理論を考えるのだろうか？ これは尤もな問いであるし，特に日頃超弦理論を研究している訳ではない読者にはなおさらなことだろう．

この問いには様々なレベルで幾つかの解答を用意することができる．例えば，技術的には第 4 章で議論する超対称ゲージ理論を解析するツールが 3 次元の場合に最も整備されていることを挙げてもいいかもしれないし，前章で述べたように 6 次元多様体から作るのに絶妙な次元であることを述べてもいいかもしれない．また，4 次元理論をよりよく理解するために 3 次元理論の理解が役立つという一般論を述べてもよいだろう．

これらは全て正しいが，本書では次の 2 点を強調しておきたい．すなわち，(1) **3 次元場の理論にはチャーン＝サイモンズ項が存在するため，場の理論の貼り合わせにより豊かな構造が存在すること** (2) **本書で考える 3 次元場の理論は，4 次元場の理論におけるドメインウォールとして現れること**である．

以下で説明していくように，上記 2 点は場の理論の幾何という理論的問題を

問題とする我々にとっては自然かつ基本的な問題である*1).

(2) については第 5 章で議論するので本章では (1) について説明していくことにしよう.

2.1.2 ゲージ化の反復

まず, 前章で説明した, 場の理論のゲージ化による結合を思い出そう—(アノマリーを持たない) 大域対称性 G を持つ理論を二つ持ってきて, その $G\times G$ 対称性の対角部分をゲージ化する.

既に第 1 章で述べたように, ここで重要なのはゲージ化・非ゲージ化を単発で行うことではない. 基本的な理論から出発して, ゲージ化を**複数回繰り返す**ことにより双対性のウェブを作り出すのがその眼目であった.

これはとても興味深い操作ではあるが, 一つ問題がある：ある大域対称性 G を持つ場の理論があったとすると, 一般にその対称性をゲージ化した場の理論はもはや大域対称性を持たず, 従ってさらにゲージ化の作用を考え, より複雑な理論を構成していくことはできない.

少し考えると, この問題には次のような解決があることが分かる—全ての大域対称性をゲージ化してしまうのではなく, 一部を残したまま残りをゲージ化すればよい. 例えば, 大域対称性 G を持つ理論があったとき, それとは別に $G\times G'$ 大域対称性を持つ理論を持ってきて, $G\times G$ の対角部分をゲージ化すれば, 新しく G' 大域対称性を持つ理論ができる. 次のステップでは $G'\times G''$ 対称性を持つ理論を持ってきて, この操作を繰り返せばよい. $G\times G'$ 大域対称性を持つ理論の最も簡単な例は $G\times G'$ 大域対称性のもとでそれぞれ G について基本表現, G' について反基本表現 (基本表現の複素共役) で変換する自由な (つまり, 相互作用しない) 場である：このような表現は $G\times G'$ に対する**バイファンダメンタル表現** (**双基本表現, bifundamental representation**) とも呼ばれる. この場合上のようにしてできる場の理論は**箙ゲージ理論** (**えびらゲージ理論, quiver gauge theory**) と呼ばれる (図 2.1 を参考のこと. 箙ゲージ理論は第 5.3 節で再登場する).

ここで, **箙** (**えびら, 箙ダイアグラム, quiver**)*2) とは有向グラフのことであり, 頂点はゲージ場 (例えば $U(N)$) を意味する：但し, これは背景ゲージ場であってもゲージ化されていてもよく, その違いを表現するには例えば図 2.1 にあるように四角と丸を用いる. また矢印は両端のゲージ群のもとでバイファンダメンタル表現で振る

*1) 同時にこれは実際的な立場からも実は自然である. 例えば (2) に関しては, 実際の実験系では, しばしば 3 次元 (2+1 次元) 系は二つの物質の界面に実現されることを思い出そう. 例えば, 異なる種類の半導体 (典型的には GaAs と AlGaAs) を接合すると, 界面には量子ホール効果が実現され, それは 3 次元チャーン=サイモンズ理論で記述される. これは上の (1)(2) を実際の物理系で実現したものに他ならない.

*2) 箙 (quiver) というのは矢を入れる筒のことで, 有向グラフの矢印が並んだ様子を矢筒に例えたネーミングである.

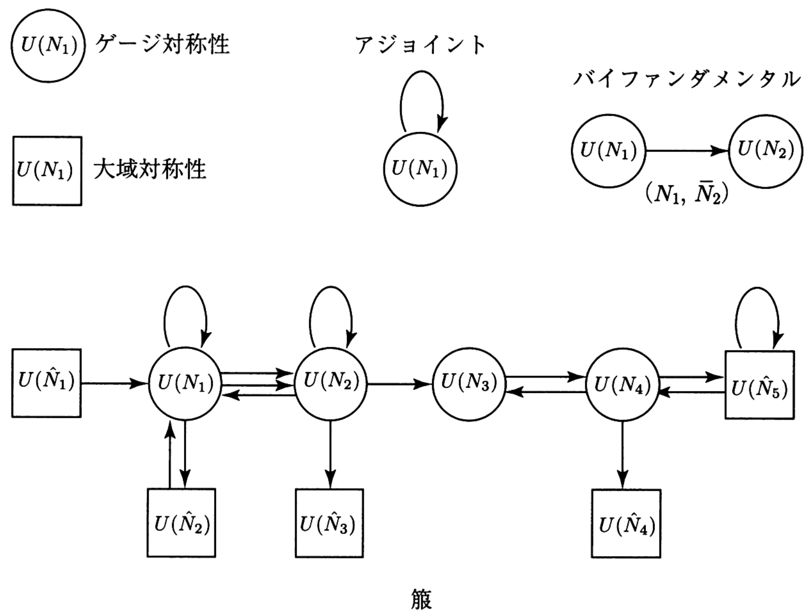


図 2.1 ゲージ対称性を丸，大域対称性を四角で表す．また物質場は矢印で表され，矢印の始点と終点の対称性のもとでバイファンダメンタルとして振る舞う．これらを組み合わせることで複雑なゲージ理論（箙ゲージ理論）を構成できる．

舞う物質場とする．つまり，矢印がゲージ群 $U(N_1)$ を持つ頂点から出発し，ゲージ群 $U(N_2)$ を持つ頂点で端を持ったとすると，そのもとでそれぞれ基本表現と反基本表現 $(\boldsymbol{N}_1, \overline{\boldsymbol{N}_2})$ として振る舞う物質場を矢印に対応させる．

2.1.3 3 次元でのゲージ化

この方法は任意の次元で適用できたが，3 次元（より一般には奇数次元）の場合には別の方法がある．背景ゲージ場 A_μ をゲージ化することにしよう．このとき，大域対称性はゲージ対称性に格上げされることになるので，大域対称性は理論からなくなってしまうが，同時に別の大域対称性（トポロジカル対称性）が現れるのである．

これを見るには，ゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}$ から次のカレントを定義しよう[*3)]：

$$J := \frac{1}{2\pi} * F \quad \text{つまり} \quad J^\mu := \frac{1}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \,. \tag{2.1}$$

これは定義から保存する：

$$D_\mu J^\mu = \frac{1}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}D_\mu F_{\nu\rho} = 0 \,. \tag{2.2}$$

但し，最後はビアンキ恒等式であり，直接の計算により確認できる．また，後

*3) なお，可換ゲージ群の場合を考えると，ベクトル解析の用語では (2.1) は $J = \frac{1}{2\pi} * dA = \frac{1}{2\pi}\mathrm{rot}\, A$, (2.2) は $\mathrm{div}\, J = 0$ となる．3 次元において $\mathrm{div}\, J = 0$ の時(局所的には) $J = \mathrm{rot}\, A$ と書けることを思い出されたい．

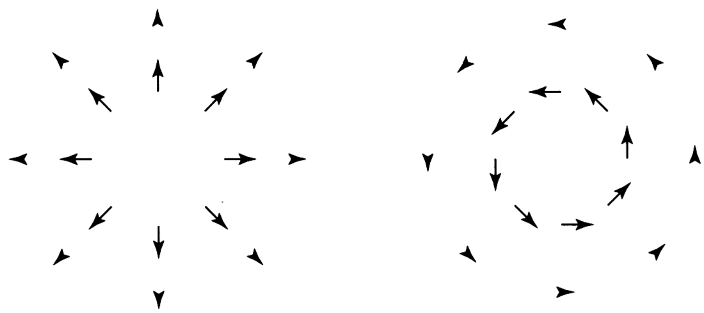


図 2.2　ゲージ場の電場（右）は対応するトポロジカル $U(1)$ 対称性のボーテックス（左）を作り出す．

の便宜のために J^μ の定義にファクター 2π を加えておいた．

保存カレントが存在すると，一般論としてそのチャージ $Q_{保存} := \int J^0$ は保存するので大域対称性を生成すると期待される．しかしここでのカレントは対称性に付随したネーターチャージではなくトポロジカルチャージに対応しており，その保存則は運動方程式ではなくトポロジカルな理由により保証されている：実際，カレントの保存則 (2.2) では理論の運動方程式を一切使っていないことに注意しよう．このことが理由で，J^μ に対応する大域対称性はしばしば**トポロジカル $U(1)$ 対称性（topological $U(1)$ symmetry）**，あるいは **$U(1)_J$ 対称性（$U(1)_J$ symmetry）**と呼ばれる．

このことをもう少し詳しくみるには，$U(1)$ トポロジカル対称性のカレントの定義 (2.1) に立ち戻ればよい．ゲージ場が電場を持つとし，原点に電荷 q があるとしよう．対応する電場は $E^i = F^{i0} = \frac{qx^i}{2\pi r^2}$ である（ここで $i, j = 1, 2$ は 2 次元空間方向の足とした）．2 次元空間では電場は逆 1 乗則に従うことに注意されたい．このとき，対応するトポロジカル $U(1)$ 対称性のカレントは

$$J^i = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{ij}\frac{qx_j}{2\pi r^2} \tag{2.3}$$

であるので，それを図示すると図 2.2 のようになり，原点の周りには回転する流れができている．これは**ボーテックス（渦糸，vortex）**と呼ばれる．今，時間方向の依存性は存在しないので，ボーテックスは時間方向に 1 次元的に延びていることに注意しよう．q の値は原点周りの巻き付き数（winding number）と呼ばれる整数を定め，それはボーテックスのチャージである：

$$q = -2\pi \oint dx^i J_i \in \mathbb{Z}\ . \tag{2.4}$$

巻き付き数はトポロジカルな量であり，それを持つボーテックスはソリトンの一種である．まとめると，**ゲージ場の電場はトポロジカル $U(1)$ 対称性のボーテックスを作り出し，ゲージ場についての電荷はボーテックスのチャージ（巻き付き数）を与える**のである．

トポロジカル $U(1)$ 対称性のもとではラグランジアンに存在する場（ゲージ場 A_μ 及びそれが結合するボソンやフェルミオン）はチャージを持っていなかった．しかし，対称性である以上，何かに非自明に作用している筈である．それでは，トポロジカル $U(1)$ 対称性は何に作用するのだろうか？ この問いに答えるには，ゲージ場の「双対」を考えなければならない．以下ではこのことについて説明しよう．

2.2 双対変換

ゲージ場に対する双対変換を説明するために，$U(1)$ ゲージ場のラグランジアンから出発しよう：

$$L_{\text{可換ゲージ場}} = -\int d^3x \, \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ . \tag{2.5}$$

ここで, $F_{\mu\nu}$ の各成分は独立ではなく, ゲージ場 A_μ を用いて $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と表されていた．このときビアンキ恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$ が成立するが，逆にビアンキ恒等式が成立すれば $F_{\mu\nu}$ から対応するゲージ場 A_μ を構成することができる*4)．そこでラグランジュ未定係数 γ を導入することでビアンキ恒等式を課そう：

$$L = -\int d^3x \, \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2g^2}\gamma\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} \ . \tag{2.6}$$

但し γ は質量次元 1 を持つ．このとき $F_{\mu\nu}$ は独立な 2–形式と看做すことができる．部分積分することで

$$L = -\int d^3x \, \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2g^2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\gamma F_{\nu\rho} \ . \tag{2.7}$$

但し，ここでは境界項は消えるような適切な境界条件が課されているものとする．このラグランジアンは 2–形式 $F_{\mu\nu}$ について 2 次であるので，$F_{\mu\nu}$ について直ちに積分できて

$$F_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\rho\gamma \ , \quad \text{あるいは} \quad \partial^\mu\gamma = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \tag{2.8}$$

となり，これを代入すると新しいラグランジアンは

$$L = \int d^3x \, \frac{1}{2g^2}\partial^\mu\gamma\partial_\mu\gamma \tag{2.9}$$

となる．

双対スカラー γ は周期性を持つ．それを確かめるために，γ の値を g^2 だけず

*4) 脚注 3 参照．微分形式の言葉で言えば 2–形式 F に対し $dF = 0$ が成立するときある 1–形式が存在し $F = dA$．これはポアンカレの補題である．この主張は 3 次元時空が非自明なトポロジーを持つとき成り立たないが，ここでは平坦で特に単連結な時空 $\mathbb{R}^{2,1}$ を考える（参考：$\mathbb{R}^{2,1}$ よりも一般の時空での双対変換についての最近の議論としては [37] がある.）．

らしてみよう．このとき，ラグランジアン (2.6) の値は

$$L = \frac{1}{2}\int d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu F_{\nu\rho} = \int_{\mathbb{R}^{2,1}} dF = 2\pi\int_{S^2_\infty}\frac{F}{2\pi} \in 2\pi\mathbb{Z}\ . \tag{2.10}$$

ここで，S^2_∞ は $\mathbb{R}^{2,1}$ の無限遠での球面である．また最後に現れた組み合わせ $c_1(F) := \frac{F}{2\pi}$ は S^2 上のベクトル束の第一チャーンクラスと呼ばれるもの（特性類）でありその S^2_∞ 上での積分は整数になることが知られている[38]．従ってラグランジアン自体は変換するが作用の e^{iL} の値自体は変化しない．従って γ は周期 g^2 を持つ：

$$\gamma \sim \gamma + g^2\ . \tag{2.11}$$

このようにして相互作用のない $U(1)$ ゲージ場は周期 g^2 を持つ自由スカラー場 γ と等価であることが分かった．このスカラー場のことをゲージ場の**双対フォトン（dual photon）**と呼ぶ．

新しく得られたラグランジアンは $\delta\gamma =$ 定数 の変換（γ のシフト）のもとで不変である．念のため，これに対応するネーターカレントを構成すると（演習問題 2.1），

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi}\partial_\mu\gamma \tag{2.12}$$

となる．(2.8) を使うとこれは先程定義した (2.1) と一致する．従って，**トポロジカル $U(1)$ 対称性はゲージ場の双対フォトンのシフト対称性に対応すること**が分かった．つまり，トポロジカル $U(1)$ 対称性についてチャージを持つのは双対フォトンだったのだ．

ここまでの双対変換の議論ではゲージ場のみを議論したが，実際にはゲージ場は物質場（スカラーやフェルミオン）と相互作用しているのでそれらを込めて双対変換を取らなければならない．ボソンからなる系ではこれは物性系ではよく議論されており，**粒子・ボーテックス双対性（particle-vortex duality）**，あるいは**ボソン・ボーテックス双対性（boson-vortex duality）**と呼ばれている．次章で述べる 3 次元ミラー対称性はこの双対変換をボソンとフェルミオンを含む超対称理論の場合に実行したものであるということができる（次章の演習問題 3.5 も参照）．また，ゲージ群が非可換な理論でも，そのゲージ群が可換な部分群に破れている状況では同様の双対変換を実行することができる．次章で議論する真空のモジュライのクーロンブランチは，その状況の例である．

さて，今度はトポロジカル $U(1)$ 対称性に対して背景ゲージ場 $A^\mu_{\text{背景}}$ と書き，そのカレント J_μ との結合 (1.21) を考えてみよう．カレントの定義 (2.1) より，

$$\int J_\mu A^\mu_{\text{背景}} = \frac{1}{2\pi}\int dA\wedge A^{\text{背景}}\ . \tag{2.13}$$

より一般に，複数のゲージ場 $(A_i)_\mu$ に対して定義される次の**チャーン＝サイモ**

ンズ項（**Cherm-Simons term**）の一例である：[*5)*6)]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CS}} = \sum_{i,j} \frac{k_{i,j}}{4\pi} A_i \wedge dA_j = \sum_{i,j} \frac{k_{i,j}}{4\pi} \epsilon^{\mu\rho\sigma} A_\mu \partial_\rho A_\sigma \ . \tag{2.14}$$

ここで $\{k_{i,j}\}$ は対称行列 $k_{i,j} = k_{j,i}$ であり，$i = j$（$i \neq j$）の項を対角（非対角）チャーン＝サイモンズ項と呼ぶ．

つまり，ゲージ場 A_μ に付随したトポロジカル $U(1)_J$ 対称性のカレントと背景ゲージ場 $A_\mu^{背景}$ の結合は，非対角チャーン＝サイモンズ項に他ならないことが分かった．

チャーン＝サイモンズ項はゲージ場そのもの（その場の強さではなく）をラグランジアンに含むので，作用がゲージ不変であるかどうかは自明ではない．第 7.1.1 節でより詳しく議論するように，経路積分がゲージ不変性を持つためにレベル $k_{i,j}$ は整数であることが要請される．

2.3 $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 作用

さて，トポロジカル $U(1)$ 対称性の意味を理解したところで場の理論の結合の問題に立ち戻ろう．ゲージ化されたゲージ場はその双対フォトンをシフトするトポロジカル $U(1)_J$ 対称性を持つので，その $U(1)_J$ 対称性をゲージ化することが可能である．この操作を繰り返していくと何が起こるだろうか？

実は，この操作は 2 回繰り返すと自明なものになってしまう．このことをみるには，全てラグランジアンで議論すると便利である．既に前節で述べたようにゲージ化の操作は非対角チャーン＝サイモンズ項で表された：

$$S: \ \mathcal{L}[A] \to \mathcal{L}'[B] = \mathcal{L}[A] + \frac{1}{2\pi} B \wedge dA \ . \tag{2.15}$$

但し，今 $U(1)_J$ 対称性の背景ゲージ場のことを B_μ と書いた．もとの大域対称性の背景場 A_μ は操作の後にゲージ化されたことを思い出しておこう．また，この操作を S 変換と呼ぼう：理由はすぐ後で明らかになる．

この操作を 2 回繰り返すと，定義より

$$S^2: \ \mathcal{L}[A] \to \mathcal{L}'[C] = \mathcal{L}[A] + \frac{1}{2\pi} B \wedge dA + \frac{1}{2\pi} C \wedge dB \ . \tag{2.16}$$

ここで，B はダイナミカルなゲージ場であり先に積分することができる．ラグ

---

*5) チャーン＝サイモンズ項では，（例えばヤン＝ミルズ場の運動項とは異なり）ゲージ不変性の要請のみから相対論的不変性が従う．非相対論的な物性系に現れる量子ホール系が相対論的な場の理論で記述されるのはこのためである．

*6) 量子ホール系では，ランダウ準位間の相互作用が無視できるとき，各ランダウ準位に対し対応する $U(1)$ ゲージ場を考え，(2.14) を考えることがある．このとき，係数行列 $k_{i,j}$ はしばしば K 行列と呼ばれる．

ランジアンに B は線形に現れるのでこれは容易に積分できて拘束 $A+C=0$ を与える（より正確には $A+C$ はゲージ変換の自由度を除いて自明である）．従って $\mathcal{L}'[C]=\mathcal{L}[-A]$ であり，S^2 は理論を（A の符号を除いて）保つことが分かる．

我々の目的の一つは理論のゲージ化によって新しい理論を構成していくことだったから，これはがっかりの結果である．しかし落胆するにはまだ早い．(2.15) は非対角チャーン＝サイモンズ項を足す変換であったが，それならば対角チャーン＝サイモンズ項を足す変換も考えてみよう：

$$T:\mathcal{L}[A]\to\mathcal{L}'[A]=\mathcal{L}[A]+\frac{1}{4\pi}A\wedge dA\ . \tag{2.17}$$

ここで (2.15)，(2.17) の変換を繰り返し行うとなにが起こるだろうか？ 実は，これらの**変換** S,T **は** $SL(2,\mathbb{Z})$ **変換を生成し，**(2.15) **及び** (2.17) **はそれぞれ** $SL(2,\mathbb{Z})$ **の生成子** S,T（(1.15) **を見よ）に対応する**のだ：つまり，関係式 (1.16) が成立する．

S^2 については既に調べた：$S^2=-1$ のマイナス符号はゲージ場の符号を逆にすること（荷電共役）として解釈される．

もう一つの関係式 $(ST)^3=1$ の証明も同様である．$(ST)^3$ を定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}(ST)^3:\mathcal{L}[A]\to\mathcal{L}'[D]=\mathcal{L}[A]&+\frac{1}{4\pi}A\wedge dA+\frac{1}{2\pi}A\wedge dB\\&+\frac{1}{4\pi}B\wedge dB+\frac{1}{2\pi}B\wedge dC\\&+\frac{1}{4\pi}C\wedge dC+\frac{1}{2\pi}C\wedge dD\ .\end{aligned} \tag{2.18}$$

ダイナミカルな場 B について積分すると $B=-(A+C)$ となり，それを今の式に代入すると

$$\mathcal{L}'[D]=\mathcal{L}[A]-\frac{1}{2\pi}A\wedge dC+\frac{1}{2\pi}C\wedge dD\ . \tag{2.19}$$

今度は別のダイナミカルな場 C に対して積分すると，$A=D$，従って $\mathcal{L}'[D]=\mathcal{L}[A]$ を得る．これは $(ST)^3=1$ に他ならない．なお，ここまでの議論では分配関数の規格化定数については気にしてこなかったが，より精密な議論により関係式 $S^2=-1,(ST)^3=1$ は分配関数の規格化をも込めて成立することが示せる[39]．

まとめると，我々は 3 次元場の理論のトポロジカル対称性やそのゲージ化の概念を追究することで **3 次元ゲージ理論に作用する** $SL(2,\mathbb{Z})$ **変換**の概念にたどり着いた．ここで，この $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換は一つの理論に存在する**対称性でも双対性でもない**ことを強調しておこう：$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換は一つの 3 次元理論を別の 3 次元理論に，従って一つの物理現象を別の物理現象に移すのである．

教科書的な一つの場の理論の性質を調べることに慣れた我々にはこのような

変換の概念の意味は未だ明らかではないかもしれない．しかしその意味は本書の後半（例えば第 5 章及び第 9 章）において明らかになるであろう．少し先走れば，実はこの $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換は実は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論ではなく別の理論（4 次元理論）の双対変換として解釈できる（第 5.2.3 節）．そこでは $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を非可換ゲージ群の場合にどう一般化するかも議論される．

可換ゲージ理論に対する $SL(2, \mathbb{Z})$ 作用は歴史的には分数量子ホール効果の文脈でも議論されており[40]，その後 AdS/CFT 対応からの動機でも議論された[39]．非可換ゲージ理論の場合については（3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の文脈で）第 5.3 節で議論されるであろう．

ここまでの議論をラグランジアンが複数の大域 $U(1)$ 対称性 $U(1)^n$ を持つ場合に拡張することができる．この場合の議論は省略するがゲージ場の種類が増えるだけでその基本的な考え方は同じであり，それは**モジュラー・シンプレクティック群**（**modular symplectic group**）$Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換を生成する（$Sp(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})$ であることに注意）．

2.4 低エネルギーでの振る舞い

ここまで述べてきた 3 次元場の理論の性質は，3 次元が奇数次元であることに由来していた．これとは別に，3 次元が 4 次元よりも小さな次元であることからも興味深い事実が導かれる．

3 次元と 4 次元ではゲージ場の繰り込み群のもとでの振る舞いが大きく異なる．これを見るには，ゲージ結合定数 g^2 の質量次元を調べればよい．ゲージ場の次元が座標についての微分と同じ 1 であること，またゲージ場の運動項 $\frac{1}{g^2}\int \mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ から結合定数 g^2 の質量次元は D 次元では

$$[g] = \frac{4-D}{2} \tag{2.20}$$

である．従ってその繰り込み群方程式 (1.5) は変更を受けて（$g\mu^{(D-4)/2}$ が次元を持たないコンビネーションであることに注意）

$$\frac{dg}{d\log\mu} = \frac{(D-4)}{2}g - \frac{b_0}{16\pi^2}g^3\mu^{D-4} + \cdots . \tag{2.21}$$

従って，$g \sim 0$ から出発すると g^2 の値は $D < 4$ の時は低エネルギーではどんどん大きくなっていくことが期待される*7)．これは，b_0（1 ループからの寄与）の符号，つまりゲージ理論のゲージ群や物質場の取り方によって低エネルギー

*7) $D > 4$ の時には逆に強結合領域になるのは高エネルギーの領域である．このとき，繰り込み群を逆に辿ることになるので強結合領域を議論するのに場の理論が十分であるかは一般には明らかではない．しかしカットオフスケールに到達して理論が破綻する以前に繰り込み群の固定点に流れ込むことが示唆されている例が知られている（文献 [41]，また関連して 6 次元 (2,0) についての第 6.2 節の議論もみよ）．

での振る舞いが大きく異なる 4 次元の事情とは大きく異なる．特に，4 次元では $U(1)$ ゲージ理論は低エネルギーで g^2 の値が 0 に近づき自由（free）な理論に近づくのに対し，3 次元では $U(1)$ ゲージ理論でも g^2 の値が大きくなり強結合領域になることがしばしば起こる[*8)][*9)]．**本章ではしばしばゲージ群が可換な 3 次元ゲージ場の理論を考えるが**，これらの理論がその低エネルギー領域で非自明なダイナミクスを持つのはこれが理由である．

演習問題

2.1 [♦]（$U(1)_J$ 対称性のネーターカレント）可換 $U(1)$ ゲージ理論の双対フォトンのラグランジアン (2.9) を考え，双対フォトンのシフト対称性に対応するネーターカレントを構成せよ．

2.2 [♦]（自由ゲージ場の双対変換）本章では 3 次元の相互作用しないゲージ場について双対変換を行い，周期性を持つ自由スカラー場を得た．それでは 4 次元の自由ゲージ場に対して同様の双対変換は可能だろうか？ 5 次元ならばどうだろうか？（第 5.2.3 節も参考になる．）

2.3 [♦]（ウィルソン＝フィッシャー固定点）繰り込み群方程式 (2.21) において次元 D を形式的に $D=4-\epsilon$（但し ϵ は小さな正の整数）と取ろう．このとき，b_0 が適切な符号を持てば 1 ループ近似で繰り込み群方程式の固定点が存在するを示せ．また，b_0 がオーダー 1 であるとき，2 ループ以上を無視する近似がその固定点の周りで自己無撞着であることを示せ．

*8) 3 次元理論でも，例えばフレーバーの数を大きく取ることにより弱結合の固定点を考えることはできる．これは前章の脚注 11 で述べたバンクス＝ザックス型固定点の 3 次元類似である．

*9) このことから分かるように，$D=4$ はゲージ場の質量次元がちょうど 0 になる釣り合いの取れた絶妙な次元であることが分かる．このことは我々の住む時空（のうちサイズの大きなもの）が 4 個あることと関係しているのかもしれない．

第 3 章
3次元超対称理論速成コース

本章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称理論の基本事項を要約する．なかでも実質量や 2–3 ミラー対称性は次章以降で重要である．前章で導入された $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換等の概念も超対称化される．

3.1 3次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性

前章では 3 次元場の理論とそのゲージ化について議論してきたが，本章ではそれを 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の場合に特化して前章の議論がどう反映されるかを見てみよう．

手始めに，本書で必要になる 3 次元超対称理論の基礎事項について手短にまとめておく．オリジナルの文献は [42] 及び [43] である．特に前者は基礎事項のレビューも含んでいるので初学者にもお薦めしたい．日本語では [44] の一部に関連事項が丁寧に説明されている．本章の内容は 90 年代には既に知られていた古典的な内容であるが，ここではそのなかでも特に次章以降で重要になる内容に焦点を当てる．

超対称ゲージ理論の定式化の詳細は一般に次元や超対称性の数によって異なる．これは主として，フェルミオンによるものである—ワイル（Weyl）フェルミオンやマヨラナ（Majorana）フェルミオンといったフェルミオンは任意の次元に存在するわけではないし，その存在は時空の計量の符号にも依存する．これはどの次元でも存在するスカラー場との大きな違いである．

本書で考えるのは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性である．これは 4 つの超対称電荷を持ち，4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の次元還元として理解できる．従って理論構成のかなりの部分は共通する部分がある．

以下の説明では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の超場形式について手短に説明する．超場形式は便利なフォーマリズムではあるが，実際には本書ではスーパーパートナーを明白に必要とする部分は少ないので超場形式はそれほど必要とするわけ

ではない．ここで超場形式を説明するのは，むしろ 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の超対称理論を既に学んだ読者の理解のためである．超場形式に不慣れな読者は分からないところがあっても適宜読み飛ばして進まれたい．なお，局所化についての次章ではユークリッド計量を考えるが，この章では通常通りローレンツ計量を考える．

3.1.1 超対称代数

4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称理論では実 4 成分を持つマヨラナフェルミオンを考える．対応して 4 つの超対称チャージを考え，それらは

$$Q_\alpha, \quad \overline{Q}_{\dot\beta}\,, \quad (\alpha=1,2, \quad \dot\beta=1,2)$$

と書かれた．ここで添え字の α と $\dot\beta$ でドット付きとなしを区別したのは，4 次元のローレンツ群 $SO(3,1)$ が $SO(3,1)\sim SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ であり*1) それぞれ別の表現 $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ 及び $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ であることを示す為である．

3 次元では状況は異なる．このとき 3 次元のマヨラナフェルミオンが存在するがその成分の数は実 2 成分と 4 次元の時の半分であり，4 次元のマヨラナフェルミオンは従って 3 次元のマヨラナフェルミオン二つに分解する．これが 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の次元還元*2) が 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性である理由である．

これは次のようにも説明できる．ローレンツ群は $SO(2,1)\simeq SL(2,\mathbb{R})$ であり，これは 4 次元でのローレンツ群の部分群であって

$$SO(2,1)\simeq SL(2,\mathbb{R})\subset SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})\sim SO(3,1) \tag{3.1}$$

のように二つの $SL(2,\mathbb{R})$ の対角成分に埋め込まれている*3)．従って超対称チャージにおいてドット付きとドット無しの区別はなく，超対称チャージは

$$Q_\alpha, \quad \overline{Q}_\beta\,, \quad (\alpha,\beta=1,2)$$

と書かれることになる．

超対称チャージの満たす交換関係は 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の交換関係

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=\{\overline{Q}_{\dot\alpha},\overline{Q}_{\dot\beta}\}=0, \quad \{Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot\beta}\}=2(\sigma^{\hat\mu})_{\alpha\dot\beta}P_{\hat\mu} \tag{3.2}$$

---

*1) ここで $\simeq$ ではなく $\sim$ と書いたのは，正確にはウィック回転が必要だからである：正しい式は $SO(2,2)\simeq SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$．$SO(2,2)$ の場合は二つのスピノル $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ 及び $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ は実に取れ独立であるが，ウィック回転した $SO(3,1)$ の場合には二つのスピノルは複素になり互いに複素共役の関係にある．

*2) コンパクト化（この場合は S^1 コンパクト化）によって次元を減らすことを次元還元と呼ぶ．

*3) この埋め込みはウィック（Wick）回転すると $SO(3)\subset SO(4)\simeq SO(3)\times SO(3)$ となる．$SO(4)$ の生成子を $\mu\nu$ 方向の回転の生成子 $J_{\mu\nu},(\mu,\nu=1,\ldots,4)$ （より具体的には $(J_{\mu\nu})_{a,b}=i(\delta_{\mu a}\delta_{\nu b}-\delta_{\mu b}\delta_{\nu a})$）に取ると，$SO(3)\times SO(3)$ は $\{J_{12}\pm J_{34},J_{13}\pm J_{42},J_{14}\pm J_{23}\}$ で生成され，123 方向の回転に相当する $\{J_{12},J_{23},J_{31}\}$ は二つの $SO(3)$ に対角に埋め込まれていることが分かる．

（但し $\hat{\mu}=0,1,2,3$）の次元還元として得られる．3 次元でのシグマ行列 $\sigma_{0,1,2}$ を実に取り

$$\sigma^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$
$$(\sigma^3)_{\alpha\beta} := i\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と取ろう（これは通常のパウリ行列の取り方とは σ^2 と σ^3 が逆であるので注意が必要である）．このとき，

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_\alpha\ , \overline{Q}_\beta\} = 0\ , \quad \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu + i\epsilon_{\alpha\beta}Z \tag{3.4}$$

となる．但し，$\mu = 0,1,2$ である．また Z は拡大された超対称性に現れる**セントラルチャージ**（**中心荷電，central charge**）であり，それは 4 次元理論の運動量 P^3 の次元還元に相当するものである．

交換関係 (3.4) で $P_\mu = -i\partial_\mu$ としたものは次式により実現される：

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\beta}\overline{\theta}^\beta\partial_\mu\ , \quad \overline{Q}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^\alpha} - i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\alpha}\partial_\mu\ . \tag{3.5}$$

既約表現としての超場を考える為には超空間での共変微分 $D_\alpha, \overline{D}_\alpha$ を導入しておくのが便利である：

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\beta}\overline{\theta}^\beta\partial_\mu\ , \quad \overline{D}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^\alpha} - i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\alpha}\partial_\mu\ . \tag{3.6}$$

これらは超対称チャージ $Q_\alpha, \overline{Q}_\alpha$ と反交換する：

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = \{Q_\alpha, \overline{D}_\beta\} = \{\overline{Q}_\alpha, D_\beta\} = \{\overline{Q}_\alpha, \overline{D}_\beta\} = 0\ . \tag{3.7}$$

なお，本書ではスピノルの足の位置は（添字 α と $\dot{\alpha}$ の区別がないことを除いて）4 次元の時と同じに取る．例えば添字の上げ下げは $\epsilon_{\alpha\beta}$ 及び $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}$ を用いて*4)

$$\theta^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\ , \quad \theta_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta\ . \tag{3.8}$$

また足の縮約は 4 次元と同様に取ることにして，例えば

$$\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha\ , \quad \theta\sigma^\mu\theta = \theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\ , \quad \overline{\theta\theta} = \overline{\theta}_\alpha\overline{\theta}^\alpha\ . \tag{3.9}$$

3.1.2　超場形式

超対称性の表現を取り扱う便利な方法が超場形式であった．4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超

*4)　3 次元では添字の上げ下げを例えば $-\epsilon_{\alpha\beta}$ で行う流儀もあるので文献の比較には注意が必要である．

場を次元還元することで3次元$\mathcal{N}=2$超場を得ることができる．

カイラル多重項（**chiral multiplet**）Φは$D_\alpha\Phi=0$を満たす超場であり，複素スカラー場ϕ，3次元マヨラナフェルミオン$\psi,\overline{\psi}$及び複素スカラーの補助場Fからなる：[*5)]

$$\Phi\colon (\phi,\psi,\overline{\psi},F)\ . \tag{3.10}$$

同様に$\overline{D}_\alpha\overline{\Phi}=0$を満たす反カイラル超場$\overline{\Phi}$を考えることもできる．

カイラル超場の条件は変数$y^\mu:=x^\mu+i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$を使うと解くことができ，そのときグラスマン変数$\theta,\overline{\theta}$での展開は

$$\begin{aligned}\Phi(y,\theta)&=\phi(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+(\theta\theta)F(y)\\&=\phi(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+(\theta\theta)F(x)+i(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu\phi(x)\\&\qquad-\frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\overline{\theta}+\frac{1}{4}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\Box\phi(x)\ .\end{aligned} \tag{3.11}$$

但し，ここで

$$\theta_\alpha\theta_\beta=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\theta\theta)\ ,\quad (\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\theta\sigma^\nu\overline{\theta})=-\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\eta^{\mu\nu} \tag{3.12}$$

等の式を用いた．これらの式はθがグラスマン変数であること及びσ^μの定義から導くことができる．

次に**ベクトル多重項**（**vector multiplet**）も考えることにしよう．これはゲージ場A_μを含む多重項Vであり，実である（$V^\dagger=V$）．ゲージ場の他には実スカラーσ，ゲージーノ$\lambda,\overline{\lambda}$及び実スカラーの補助場$D$を含む[*6)]：

$$V:\ (A_\mu,\sigma,\lambda,\overline{\lambda},D)\ . \tag{3.13}$$

ここでσと書いたスカラーは4次元から次元還元したと考えたときにはコンパクト化した方向のゲージ場の成分（A_3）と思うことができ，**ベクトル多重項のスカラー**（**vector multiplet scalar**）と呼ばれる．後に見るように，このス

*5) ボゾンとフェルミオンの自由度が一致していることを確かめておこう．off-shellでは

$$\phi:2\ ,\quad \psi:2\times2\ ,\quad F:2$$

なのでボゾン・フェルミオン共に4．on-shellでは

$$\phi:2\ ,\quad \psi:1\times2\ ,\quad F:0$$

なのでどちらも2．

*6) ボゾンとフェルミオンの自由度が一致していることを確かめておくと，off-shellでは

$$A_\mu:3-1=2\ ,\quad \sigma:1\ ,\quad \lambda:2\times2\ ,\quad D:1$$

で共に4．on-shellでは

$$A_\mu:3-1-1=1\ ,\quad \sigma:1\ ,\quad \lambda:1\times2\ ,\quad D:0$$

で共に2．

カラーは3次元$\mathcal{N}=2$理論のクーロンブランチをパラメトライズするスカラーであるので**クーロンブランチ・スカラー**（**Coulomb branch scalar**）と呼ばれることもある．このスカラー場は4次元には存在せず，3次元場の理論についての以降の議論で極めて重要な役割を果たす．実際，このスカラーは前章で議論したトポロジカル$U(1)_J$対称性の破れに対応する南部＝ゴールドストンモードであると看做せる．

ベクトル超場Vはグラスマン変数$\theta, \overline{\theta}$について展開することができる．ベクトル超場はカイラル超場Λによるゲージ変換

$$e^V \to e^{-i\overline{\Lambda}} e^V e^{i\Lambda} \tag{3.14}$$

を許すが，それを固定するためのいわゆるウェス＝ズミノ・ゲージ（Wess-Zumino gauge）のもとで

$$\begin{aligned} V = i\left(\theta\overline{\theta}\right)\sigma(x) - \left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right) A_{\mu}(x) + i(\theta\theta)(\overline{\theta\lambda}(x)) \\ - i(\overline{\theta\theta})(\theta\lambda(x)) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})D(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

と与えられる．ここで$i(\theta\overline{\theta})\sigma(x)$の項は3次元に特有であり，4次元での$\left(\theta\sigma^3\overline{\theta}\right) A_3(x)$の次元還元である．

3.2 ラグランジアンとそのパラメーター

3.2.1 運動項

ラグランジアンは超場を使って超場形式で書くことができる．

まずは運動項を議論しよう．可換ベクトル超場にチャージqでカップルしたカイラル超場の運動項は4次元と同様で

$$\mathcal{L}_{\text{カイラル運動項}} = \int d^4\theta\ \Phi^{\dagger} e^{qV} \Phi\ . \tag{3.16}$$

次にベクトル超場の運動項を考えよう．4次元$\mathcal{N}=1$理論の場合にはゲージ場の強さを含み，かつカイラル超場Λによるゲージ変換(3.14)で不変な超場$W_{\alpha} := -\frac{1}{4}\overline{D}^2(e^{-V}D_{\alpha}e^V)$を定義した．このとき，

$$\mathcal{L}_{\text{ベクトル運動項}} = \frac{1}{2g^2}\left[\int d^2\theta\ \mathrm{Tr}\, W^{\alpha}W_{\alpha} + \int d^2\overline{\theta}\ \mathrm{Tr}\, \overline{W}_{\alpha}\overline{W}^{\alpha}\right] \tag{3.17}$$

とすればゲージ場及びそのスーパーパートナー（ゲージーノ）の運動項が得られた．

これは3次元$\mathcal{N}=2$理論の場合にもそのまま正しいが，3次元$\mathcal{N}=2$理論の場合にはまた別の表示がある：

$$\mathcal{L}_{\text{ベクトル運動項}} = -\frac{1}{g^2}\int d^4\theta\ \mathrm{Tr}\, \Sigma^2\ . \tag{3.18}$$

二つの表式 (3.17), (3.18) が同じ作用を与えることを確認することは演習問題にしておこう（演習問題 3.4）．但しここで超場 Σ は

$$\Sigma := \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\overline{D}_\alpha \left(e^{-V} D_\beta e^V\right) \tag{3.19}$$

により定義した．定義より $D^2\Sigma = \overline{D}^2\Sigma = 0, \overline{D}_\alpha\Sigma = -iW_\alpha$ が従うことに注意しておこう．また Σ がゲージ変換 (3.14) のもとで不変であることも確認できる．

超場 Σ は**線形多重項（linear multiplet）**と呼ばれる超対称代数の表現であり，その成分は保存カレントを含む．実際，Σ をグラスマン変数について展開すると（演習問題 3.2）

$$\Sigma = \sigma + \cdots - i\left(\overline{\theta}\sigma^\mu\theta\right)\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - i(\theta\overline{\theta})D + \cdots . \tag{3.20}$$

Σ の最低次の成分はベクトル多重項のスカラー σ である．また，その成分の一つには前章 (2.1) で定義したトポロジカル対称性のカレント $J^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ が現れる．

3.2.2 複素質量

さて，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に存在するパラメーターを一つ一つ見ていくことにしよう．勿論，ゲージ結合定数はパラメーターの一つである．

次に質量であるが，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論ではカイラル多重項に対して 2 種類の質量を考えることができる．

3 次元ゲージ理論には**スーパーポテンシャル（superpotential）** $W(\Phi)$ を考えることができる．これはカイラル超場 Φ の正則な関数であって，対応するラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} = \int d^2\theta\, W(\Phi) + (\text{エルミート共役}) \tag{3.21}$$

で与えられる．特に，$W(\Phi)$ の 2 次の項 $W = \frac{m_c}{2}\Phi^2$ の係数 m_c はカイラル多重項に質量を与える項であり，m_c は（すぐ後に述べる実質量と区別して）**複素質量（complex mass）**と呼ばれる．対応するラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{複素質量}} = m_c^2|\phi|^2 + m_c(\psi\psi) + m_c^*(\overline{\psi\psi}) . \tag{3.22}$$

3 次以上の項は相互作用（例えば湯川結合）を与えるが，これらの変数の値は次章で述べる S^3 分配関数には（その値がゼロであるか否かを除いて）反映されない．

ここで重要なのは，スーパーポテンシャル $W(\Phi)$ が正則なことである．**正則性（holomorphy）**はとても重要な性質であり，例えば 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の場合[45]と同様にしてファインマン図の解析に頼ることなくより概念的に 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の非繰り込み定理を証明することができる．また正則性を活用して

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のモジュライ空間も調べられてきた．また，正則性が存在すると相転移が起こらないことが直ちに従う．というのも，パラメーター空間で何か特別なことが起こる部分空間があってもそれは複素多様体であり，従ってその実余次元は 2 以上であり，それを避けることが可能だからである．

3.2.3 実質量

3 次元では複素質量の他に**実質量**（**real mass**）と呼ばれる質量を考えることができる．

カイラル超場 Φ がある大域対称性の元で非自明なチャージ q を持っている（つまり非自明に変換する）としよう．大域対称性に対応する背景ベクトル場を $V_{\text{背景}}$ と書くことにしよう．このときその大域対称性に対応する実質量 μ はカイラル多重項の運動項 (3.16) において $V_{\text{背景}}$ の $\theta\overline{\theta}$ 成分に期待値 $V_{\text{背景}}=i\mu\theta\overline{\theta}$ を与えることで得られ，それは次のラグランジアンで表される：

$$\mathcal{L}_{\text{実質量}}=\int d^4\theta\,\Phi^\dagger e^{qV_{\text{背景}}}\Phi=(q\mu)^2|\phi|^2+iq\mu\epsilon^{\alpha\beta}\overline{\psi}_\alpha\psi_\beta+\cdots\ . \quad (3.23)$$

特に，そのフェルミオンの部分は $\epsilon^{\alpha\beta}\overline{\psi}_\alpha\psi_\beta$ であり，4 次元では $\overline{\psi}$ と ψ が異なる足を持つので同じ項は書くことができないことに注意しておく．

この実質量は本書の議論の為に極めて重要なパラメーターであるのでここで幾つか補足のコメントを加えておこう．

まず，超場形式を使った定義から明らかなように，実質量を定義するラグランジアンはカイラル超場の運動項と同じ形をしている．従って，前者において背景場として大域対称性に対応していたゲージ場を局所対称性に格上げする（ゲージ化する）と前者は後者になる．この意味で実質量 μ とベクトル多重項のスカラー σ はほとんど同一のものであると考えることができる．

今考えている大域対称性は保存カレントを持つので，そこから保存チャージを構成できる．この保存チャージは超対称性代数の全ての生成子と交換するので，超対称代数では (3.4) におけるセントラルチャージ Z として現れる．この意味で実質量は超対称代数を変形する．

実質量は 4 次元からコンパクト化した際に，背景ゲージ場に対して S^1 方向に入れられたウィルソン・ラインのホロノミーを定めていると考えることができる．このことからも実質量は 4 次元のローレンツ対称性とは両立せず，3 次元に特有であることが確認できる．非可換ゲージ理論の場合も実質量はゲージ群のカルタン部分代数に対するホロノミーだけに入れておけば十分である．これは何故かというと，コンパクト化に用いた S^1 の基本群は可換であるので，適切なゲージ群の元で共役を取ることによりホロノミーをゲージ群のカルタン部分代数に選ぶことができるからである．

最後に，実質量 μ はその名の通り実のパラメーターであり，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の正則性を破ることに注意しよう．このとき先の複素質量に対する正則性の

議論は使えない．実質量を変えることで起こる変化の境界は余次元 1 であり，真空のモジュライ空間は実質量の変化とともに一般に豊かな変化を示すことになる．

3.2.4 R 対称性

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の大域対称性のうち，超対称チャージと交換しない対称性を（歴史的な経緯により）**R 対称性**（**R-symmetry**）と呼ぶ．3 次元 $\mathcal{N}=2$ 対称性の場合には，そのような対称性は二つの超対称性を入れ換える $SO(2)_R \simeq U(1)_R$ であり，グラスマン変数 $\theta_\alpha, \overline{\theta}_\alpha$ に

$$U(1)_R : \theta_\alpha \to e^{i\xi}\theta_\alpha \ , \quad \overline{\theta}_\alpha \to e^{-i\xi}\overline{\theta}_\alpha \tag{3.24}$$

と作用する．この規約のもとで，スーパーポテンシャル (3.21) は R チャージ 2 を持つ．

このような対称性の取り扱いについては注意が必要である．例えば，カイラル多重項の場 ϕ, ψ, F は通常の大域対称性のもとでは全て同じチャージを持つが，R 対称性に対しては ϕ がチャージ r を持つとすると，展開 (3.11) より ψ, F はそれぞれチャージ $r-1, r-2$ を持つことになる．R 対称性は，次章において曲がった空間の上での超対称性を考える際に特権的な役割を果たす．

3.3 チャーン＝サイモンズ項

3 次元ではゲージ場の θ 角を考えることはできない．しかしその代わり，ゲージ場に対してチャーン＝サイモンズ項を書き下すことができる．既に前章で書き下しておいた（対角）チャーン＝サイモンズ項 (2.14) を非可換ゲージ群の場合に書くと，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CS}} = \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \ . \tag{3.25}$$

なお，式 (3.25) において A_μ はゲージ場であるが，それは局所対称性に対応するダイナミカルなゲージ場であってもいいし，また大域対称性に対応する背景ゲージ場であってもいい．

このチャーン＝サイモンズ項は超対称化できる．非可換ゲージ場の場合にはその結果は $\mathcal{N}=2$ 超場形式ではやや複雑な形をしており

$$\mathcal{L}_{超対称\ \mathrm{CS}} = \sum_{i,j}\frac{k_{i,j}}{4\pi}\int d^4\theta \int_0^1 dt\ \mathrm{Tr}\left[V_i\,\epsilon^{\alpha\beta}\overline{D}_\alpha\left(e^{-tV_j}D_\beta e^{tV_j}\right)\right] \ . \tag{3.26}$$

可換群の場合にはこれは簡単化して

$$\mathcal{L}_{超対称\ \mathrm{CS}} = \sum_{i,j}\frac{k_{i,j}}{4\pi}\int d^4\theta\, V_i \Sigma_j \ . \tag{3.27}$$

これは，チャーン＝サイモンズ項が $A_i^\mu J_{j,\mu}$ であったことの自然な超対称化である：V_i（Σ_i）は A_i（J_i）を成分に持つのであった．成分で書くと

$$\mathcal{L}_{\text{超対称 CS}} = \sum_{i,j} \frac{k_{i,j}}{4\pi} \mathrm{Tr}\left(A_i \wedge dA_j + 2A_i \wedge A_i \wedge A_j + \overline{\lambda}_i \lambda_j - 2D_i \sigma_j\right) . \tag{3.28}$$

このうち $-2D\sigma$ の項は次章の局所化の議論で重要な役割を果たす．

(3.28) 式の $\lambda, \overline{\lambda}$ 部分と $D\sigma$ 部分は場について 2 次であるので自明にガウス積分することができ，結局ゲージ場についての (3.25) のみが非自明に残る．これは，チャーン＝サイモンズ項が 3 次元多様体の計量に依らずトポロジカルであり（第 7 章参照），それは超対称化しても変わらないことと両立している．

但し，チャーン＝サイモンズ場が物質場とカップルしている場合はこの限りではない．以下で考える理論ではチャーン＝サイモンズ項に現れるゲージ場はヤン＝ミルズ運動項を持ち得るほか，共変微分を通じてスカラー場やフェルミオンと言った物質場とも結合しており，その理論はトポロジカルではない（参考までに，そのような理論は例えば M2 ブレーンの物理に関連して近年詳細に研究されてきた）．

チャーン＝サイモンズ項の存在は理論の様々な性質，例えば相関関数や臨界指数を大きく変化させる．実際，3 次元ではチャーン＝サイモンズ項は標準的なヤン＝ミルズ項よりも質量次元が小さいので，理論がチャーン＝サイモンズ項を持つとすると，赤外領域ではヤン＝ミルズ項に比べてチャーン＝サイモンズ項の効果がより重要になる．

3.3.1 $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 作用

チャーン＝サイモンズ項が超対称化されたので，（可換ゲージ群の場合には）前章での $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 作用も 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の場合に超対称化することは容易である．超対称ゲージ理論のチャーン＝サイモンズ項のラグランジアンは (3.25) で与えられるので超対称化された S 変換及び T 変換は

$$\begin{aligned} S &: \mathcal{L}[V] \to \mathcal{L}'[\tilde{V}] := \mathcal{L}[V] + \frac{1}{2\pi} \int d^4\theta \, \tilde{V}\Sigma \, , \\ T &: \mathcal{L}[V] \to \mathcal{L}'[V] := \mathcal{L}[V] + \frac{1}{4\pi} \int d^4\theta \, V\Sigma \, . \end{aligned} \tag{3.29}$$

この定義式から S, T が $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換の関係式 (1.16) を満たすことを直接確認するのは前章の場合と同様である．非可換ゲージ理論の場合の $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換については第 5.3 節でコメントすることになる．

3.3.2 FI パラメーター

$U(1)$ ゲージ群があると，対応して **FI パラメーター**（**Fayet-Iliopoulos parameter**）を考えることができた．これに対応したラグランジアンは背景ゲー

ジ場 $V_{背景} = i\zeta\theta\bar{\theta}$ を用いて

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FI}} = \frac{1}{2\pi}\int d^4\theta\, V_{背景}\Sigma = \frac{i\zeta}{2\pi}\int d\theta d\bar{\theta}\,\Sigma = \frac{\zeta}{2\pi}\int d^4\theta\, V + (全微分項) \tag{3.30}$$

と書くことができる．つまり，**FI パラメーターとは，ゲージ群の双対フォトンのシフトである $U(1)_J$ 大域対称性に対する実質量に他ならないのである．**

なお，ここでの FI パラメーターの規格化は 4 次元の時は標準的ではないが，3 次元では例えば 3 次元ミラー対称性を議論する上で便利である．

3.3.3 パリティ・アノマリー

ここまでの議論ではチャーン＝サイモンズ項のレベルはパラメーターであり，ゼロに取っておくことも可能であるようにみえる．しかし，理論の無矛盾性の為に $k \neq 0$ が要請されることもある．また，最初は $k = 0$ となる理論から出発しても，低エネルギーにいくことでチャーン＝サイモンズ項が生成されることが起こりうる．これが 3 次元における量子的なチャーン＝サイモンズ項の生成，そして**パリティ・アノマリー（parity anomaly）**[46], [47] である（[48] の説明も参照）．

質量 μ を持つマヨラナフェルミオン ψ を考え，それが背景ゲージ場 A_ν にカップルしていたとしよう：$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ - \mu)\psi$．ここで μ を大きく取る極限を考えよう．素朴に考えると，このとき ψ の自由度は低エネルギーの物理から分離するので，後には ψ の効果は何も残らないように思われる．

しかし，この結論は実は誤りである．3 次元ではフェルミオンの質量項はパリティを破っており（演習問題 3.6），それに対応して残った理論にはレベルが

$$k_{有効} = \frac{\mathrm{sgn}(\mu)}{2} \tag{3.31}$$

で与えられるチャーン＝サイモンズ項が 1 ループ補正として現れるのである．チャーン＝サイモンズ項 (3.25) はその定義に $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ を含むのでパリティを破っていることに注意したい．これがパリティ・アノマリーである．チャーン＝サイモンズ項のレベルは整数で無ければならなかったので，ゲージ対称性に対して理論の無矛盾性のためには必要に応じて予め半整数レベルのチャーン＝サイモンズ項をラグランジアンに加えておかなければならない．

より一般にフェルミオンが背景ゲージ場のもとでチャージ q を持つとき，その実質量 μ から得られる有効チャーン＝サイモンズ項のレベルは

$$k_{有効} = q^2\frac{\mathrm{sgn}(\mu)}{2} \tag{3.32}$$

となる．なお，一般に複数のグローバル対称性が存在するときには，対応して非対角チャーン＝サイモンズ項も生成される（演習問題の (3.53) 参照）．

チャーン＝サイモンズ項への1ループ補正（パリティ・アノマリー）の導出については具体的なファインマン図の評価を演習問題3.8で扱うが，ここでは別の導出についてもごく簡単にコメントしておこう．

径路積分形式を考えると，フェルミオンの積分はディラック作用素の行列式 $\det i\sigma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)$ を与える．問題は，ゲージ変換によりこの行列式が変化する可能性があるということである．

どのような変化が起こりうるかを考えるために，4次元のガンマ行列 $\gamma_\mu := \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & -\sigma_\mu \end{pmatrix}$ を考えよう．これは3次元のコピーを二つ含むので，先の行列式 $\det i\sigma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)$ は4次元での行列式の平方根 $\det^{\frac{1}{2}} i\sigma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)$ と同一視できる．ここで，4次元を考える利点は，γ^5 は $\gamma_{0,1,2,3}$ の全てと反交換するので，その固有値は必ずその符号を変えたものとペアで現れるということである．従って，正の固有値だけ集めてくれば行列式の平方根が定義できたことになる．

微妙なのは，ゲージ変換により行列式は不変であるが，その平方根の取り方は符号を変える可能性があるということである．このとき，そのような3次元のゲージ場の組を連続的につなぐ1パラメーターのゲージ場の族を考え，その変化の（パラメーターの）方向を時間方向と看做すと，4次元ゲージ場が得られる．さらに，平方根の符号が変化するかどうかは4次元のディラック作用素のゼロ点固有値の数の偶奇を決定する問題に翻訳できる．これは指数定理から4次元のインスタントン数（数学的には $\pi_3(G)$）に関係付けられる（演習問題7.54(b)参照）．このアノマリーは3次元のチャーン＝サイモンズ項により打ち消すことができる（第7.1.1節参照）．

なお，パリティ・アノマリーのこの導出は，4次元の $SU(2)$ アノマリー[49]の導出と次元の違いを除けば本質的に同一である．同様の議論は11次元でも存在する[50]．

3.4 真空のモジュライ

さて，次は3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の真空のモジュライを考えることにしよう．一般に超対称理論の顕著な性質は，その最低エネルギー状態が孤立しておらず，非自明なモジュライ空間になっていることである．このモジュライ空間のことを**真空のモジュライ空間**（**vacuum moduli space**）と呼ぶ．3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の場合には，そのモジュライ空間は（一般に特異点を許した）ケーラー多様体（Kähler manifold）*7)となり，数学的にも興味深い対象である．これは，3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の正則性の一つの現れである．

古典論の範囲内で真空を同定するにはラグランジアンからポテンシャルを書き下し，それをゼロにすればよい．ポテンシャルの完全な形はここまで述べてきたラグランジアンを展開すると得られるが，ここで重要なのはカイラル多重項の運動項(3.16)の展開から得られる次の項である：

$$\int d^3x\,(q_i^a\sigma_a)^2|\phi_i^2|\,. \tag{3.33}$$

*7) ケーラー多様体の数学的定義の詳細については本書では必要ではない．ここでは，より弱く複素多様体であることが重要である．

但し，カイラル多重項 ϕ_i がゲージ群のカルタン $U(1)_a$ 対称性のもとで q_i^a なるチャージを持つとした．ベクトル多重項の非ゲージ化するとそのスカラー σ が実質量となるのであったが，この項はそのときの質量項 (3.23) に他ならない．

項 (3.33) は常に非負であるので，エネルギーを最小にするには σ_a か ϕ_i かのどちらかがゼロでなければならないことになる．そこで真空のモジュライは**クーロンブランチ**（**クーロン枝，Coulomb branch**），**ヒッグズブランチ**（**Higgs branch**），そして二つの中間である**混合ブランチ**（**mixed branch**）の 3 種類の**ブランチ**（**分枝，branch**）に分けられることになる：

$$
\begin{aligned}
&\text{クーロンブランチ：} \sigma_a \neq 0\,, \quad \text{全ての}\,\phi^i = 0\,,\\
&\text{混合ブランチ：一部の}\,\sigma_a = 0\,, \quad \text{一部の}\,\phi^i = 0\,,\\
&\text{ヒッグズブランチ：全ての}\,\sigma_a = 0\,, \quad \phi^i \neq 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

クーロンブランチでは可換ゲージ群は破れずに残っておりそのゲージ場のクーロン相互作用が残っているのに対し，ヒッグズブランチではスカラー場が期待値を持つことによりゲージ対称性が (離散部分を除いて) 完全に破れており，これが名称の由来である．

なお，本書では (有効) チャーン＝サイモンズ項を持つ理論も考えるが，その場合には全ての物質場は質量を持ちゲージ場に対するチャーン＝サイモンズ項（これもゲージ場に対する質量項である）の効果のみが低エネルギーで残り，ギャップを持つ真空が現れる．これを**トポロジカルブランチ**（**topological branch**）と呼ぶこともある．

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のモジュライ空間はとても豊かで複雑な構造を持っている．まず，上の 3 種類のブランチはそれぞれ複数個の成分を持ち得るし，それぞれが複雑につながりあっている．また，パラメーター（複素質量，実質量，FI パラメーター）を考えると，その値によってモジュライ空間は変形を受ける：例えば複素質量を入れるとカイラル超場は質量を持ち，対応するヒッグズブランチがなくなってしまう．同様のことはチャーン＝サイモンズ項によりゲージ場が質量を持つときにも起こる．

また，上の議論は古典的であったが，実際には量子補正を考慮に入れなければいけない．特に非可換ゲージ理論 $\mathcal{N}=2$ 理論の場合にはクローンブランチが量子補正により解消されることがある[51]ほか，クローンブランチとヒッグズブランチが滑らかにつながり一つのブランチにまとまることもある[42]（最近の議論としては [52] も参照）．

本章ではそのような量子補正の例のうち，最も簡単な例の一つを次に議論するが，その前にひとつ準備しておこう．

3.4.1 モノポール演算子

ここまでの議論に不完全な点が一つある．ベクトル多重項のスカラー σ が

クーロンブランチの座標であると述べたが，実際には（$\mathcal{N}=2$ 超対称性から従う）正則性の制限によってクーロンブランチはケーラー多様体，従って特に複素多様体であるから，その座標も複素数でなければならない．それでは σ が実部として，その虚部に相当するのは何だろうか？

クーロンブランチではゲージ群はその可換部分群に破れており，その $U(1)$ 因子ごとに変数 σ が存在した．従って，虚部もその $U(1)$ ゲージ場から定まるスカラー場でなければならない．そのような場を既に我々は前章でみた：$U(1)$ ゲージ場の双対フォトン γ である．前章での双対変換はゲージ場のみを考え，それを双対フォトンに変換した．超場形式を使うことによって，この双対変換を超対称化できる：超対称可換ゲージ理論の $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は，γ を成分に持つ $\mathcal{N}=2$ カイラル多重項へ変換される（演習問題 3.5）．

ここで，γ は周期性 g^2 を持ったので，ペア $\sigma+i\gamma$ を指数関数の積にのせて周期性を取り除くのが自然である．こうして得られる演算子が**モノポール演算子（monopole operator）**である[*8)]：

$$\mathcal{V} \sim \exp\left(\frac{2\pi}{g^2}(i\gamma+\sigma)\right) . \tag{3.35}$$

このようにして，**クーロンブランチの座標はモノポール演算子である**ことが分かった．但し，この式は g^2 が小さいときの式であり，赤外では後に例で見るようにこの式は量子補正を受ける（例えば図 3.1）．

定義から分かるように，モノポール演算子 $\mathcal{V}$ は $U(1)_J$ 対称性（γ のシフト $\delta\left(\frac{\gamma}{g^2}\right)=\frac{\theta}{2\pi}$）のもとでチャージを持ち，位相で変換する：

$$U(1)_J : \mathcal{V} \to e^{i\theta}\mathcal{V} . \tag{3.36}$$

モノポール演算子をある一点に挿入することを考えると，図 2.2 で電場と $U(1)_J$ カレントの入れ替えた状況が実現できる．図 2.2 ではもとのゲージ場についてチャージを持つ粒子がその周りに電場，さらには $U(1)_J$ 対称性のボーテックスを作り出したが，今は $U(1)_J$ チャージを持つモノポール演算子がその周囲にゲージ場のボーテックスを作り出すのである（但し，3 次元ではゲージ場の双対がスカラー場であることに対応して，図 2.2 では時間的に広がった粒子を考えたのに対し，今のモノポール演算子は時空の一点に挿入される（つまり時間方向に広がっていない）という違いもある）．このことを適宜超対称化することにより，（低エネルギーでも通用する）モノポール演算子の定義を得ることもできる（[53] 参照）．

モノポール演算子の定義にはもとのラグランジアンに直接含まれていない場が必要である．このような演算子のことを**非秩序演算子（disorder operator）**

*8) モノポール演算子は文献では V と書かれることが多いが，ここではベクトル超場 V と区別するためにフォント $\mathcal{V}$ を用いた．

と呼ぶ．第 2 章での議論は，この演算子を通常のラグランジアンの場で書かれた演算子へとうつす双対変換の存在を示唆する．そこで以下ではその双対性の具体例をみていくことにしよう．

3.5 2–3 ミラー対称性

本章の締めくくりとして，真空のモジュライ空間及びそれへの量子補正の例を議論し，第 1.3.4 節で触れた 2–3 ミラー対称性を真空のモジュライ空間のレベルで確認してみよう．

ここで考えたいのは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 QED である．まず古典的な解析を行おう．ヒッグズブランチではスカラー場 $q, \overline{q}$ が期待値を持つが，これらのスカラー場の値自身はゲージ場の元で非自明に変換するのでゲージ不変でない．ゲージ不変な量はその組み合わせ，メソン $M := q\overline{q}$ の期待値で与えられる．これは一つの複素数であり，$q, \overline{q}$ にともにチャージ 1 を与える軸性回転 $U(1)_A$ のもとでその位相は回転する．

今度はクーロンブランチを考えよう．既に説明したように，古典的なクーロンブランチはモノポール演算子 $\mathcal{V}$ (3.35) で指定されるので，γ が周期的であることを考慮して $\mathbb{R}\times S^1_\gamma$ で与えられる—σ が $\mathbb{R}$ 方向を，γ が S^1_γ 方向を指定する．特に，$U(1)_J$ 回転 (3.36) は S^1_γ 方向の回転に相当する．

真空のモジュライ空間はこの二つのブランチを合わせたものである筈である．但し，ここで一つ問題がある．この二つのブランチは一点 $\sigma=\phi=0$ で交わるべきだが，ヒッグズブランチには $U(1)_J$ は作用していない一方，クーロンブランチには $U(1)_J$ 対称性が固定点なしで作用している．これは矛盾である．

この矛盾は量子補正（有限 g 効果）を考えることで解消できる．モノポール演算子 $\mathcal{V}$ (3.35) の定義にはゲージ結合定数 g が現れているので，クーロンブランチが量子補正を受けると考えるのが自然である．量子補正によってクーロンブランチは $\sigma=0$ を境に二つの分枝に分かれるとしよう．こうすると，$\sigma=0$ の点が $U(1)_J$ 作用の固定点となり，ヒッグズブランチとうまくつながることができる（図 3.1）．クーロンブランチの計量に対する 1 ループでの量子補正は計算でき，それはこの描像を裏付けている．

このときクーロンブランチは二つのモノポール演算子

$$\mathcal{V}_+ \sim e^{\frac{2\pi}{g^2}(\sigma+i\gamma)}, \quad \mathcal{V}_- \sim e^{-\frac{2\pi}{g^2}(\sigma+i\gamma)} \tag{3.37}$$

で記述されることになる．但し，ここで $\sim$ としたのは量子補正のためである．

こうして量子補正を受けたクーロンブランチとヒッグズブランチを合わせて図示したのが図 3.2 である．その図をみると，三つのブランチが対等にみえてくる．実際，1 ループでの量子補正を受けたあとのクーロンブランチの計量は[43]*9)

*9） ゲージ群がアーベリアンである時には，（非摂動効果までこめて）1 ループ補正が厳密

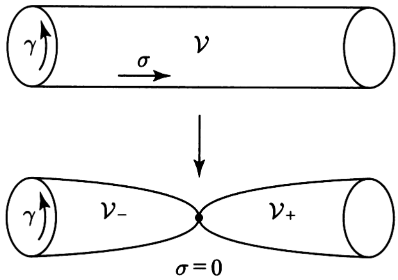


図 3.1　古典的なクーロンブランチ $\mathbb{R}^1 \times S^1$ は量子補正を受け二つのブランチに分かれる．

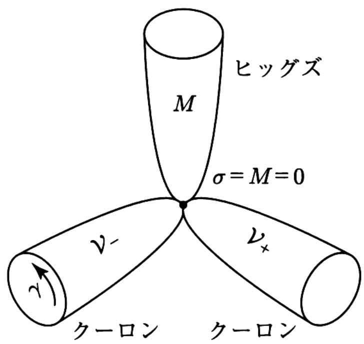


図 3.2　3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称 QED の真空のモジュライ空間．二つのクーロンブランチと一つのヒッグズブランチが一つの点で接している．

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{|\sigma|}\right) d\sigma^2 + \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{|\sigma|}\right)^{-1} d\gamma^2 \ . \tag{3.38}$$

低エネルギー極限 $g \to \infty$ でこれは適切な変数のあとヒッグズブランチの計量（$\mathbb{C}$ の平坦な計量）に一致することが確認できる．

このことは第 1 章で導入した XYZ 模型との双対性を強く支持する．実際，XYZ 模型ではスーパーポテンシャル $W = XYZ$ が存在した．従ってポテンシャルは

$$V = \left|\frac{\partial W}{\partial X}\right|^2 + \left|\frac{\partial W}{\partial X}\right|^2 + \left|\frac{\partial W}{\partial X}\right|^2 = |YZ|^2 + |ZX|^2 + |XY|^2 \tag{3.39}$$

であり，真空は次の三つのブランチを持つ：

$$\begin{aligned} &\{X \neq 0, \quad Y = Z = 0\}, \qquad \{Y \neq 0, \quad Z = X = 0\}, \\ &\{Z \neq 0, \quad X = Y = 0\} \ . \end{aligned} \tag{3.40}$$

これは $N_f = 1$ SQED のブランチと同一視でき，その対応関係は次の通りである：

であることが主張されている[43]．

$$M \leftrightarrow X\ ,\quad \mathcal{V}_+ \leftrightarrow Y\ ,\quad \mathcal{V}_- \leftrightarrow Z\ . \tag{3.41}$$

3次元ミラー対称性はクーロンブランチとヒッグズブランチの入れ替えであるという主張がしばしばなされる．これは3次元$\mathcal{N}=4$理論については正しいが，ここで議論している3次元$\mathcal{N}=2$理論については正しくない：実際，XYZ模型にはヒッグズブランチのみが存在し，そのうち一つは$N_f=1$ SQEDのヒッグズブランチに対応する．より一般に非可換ゲージ群を持つ$\mathcal{N}=2$超対称ゲージ理論においては，量子補正の効果のためにクーロンブランチとヒッグズブランチを明確に区別することさえもできなくなる．

ここまでの対応関係をまとめよう．3次元$\mathcal{N}=2$超対称QEDの場と対称性は表3.1のようになる．この表のほとんどの部分はこれまでの説明から従う．

例外はモノポール演算子$V_\pm$の$U(1)_A, U(1)_R$チャージである．これは先に説明したパリティ・アノマリーから生じる．クォーク$q, \overline{q}$に質量を与えクーロンブランチを考えたとき，パリティ・アノマリー(3.32)からチャーン＝サイモンズ項

$$\frac{k^{\text{有効}}_{A/R,J}}{2\pi}\int A_{\mu,U(1)_{A/R}} \wedge dA^{\mu}_{U(1)_J} = k^{\text{有効}}_{A/R,J}\int A_{\mu,U(1)_{A/R}} J^{\mu}_{U(1)_J} \tag{3.42}$$

が存在することになる．これは，$U(1)_{A/R}$対称性のカレント$J^{\mu}_{A/R}$を$kJ^{\mu}_{U(1)_J}$だけシフトすることになる．というのも，ラグランジアンにはカレントは

$$\int A_{\mu,U(1)_{A/R}} J^{\mu}_{U(1)_{A/R}} \tag{3.43}$$

と現れるからである（(1.21)参照）．これはつまり，$U(1)_{A,R}$対称性が$U(1)_J$対称性と混ざることになり，ここから$V_\pm$の$U(1)_A, U(1)_R$チャージが求まる*10)（演習問題3.10）．

表3.1からゲージ不変な量$M, \mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-$だけを残しそのチャージを書くと表3.2が得られる．これはXYZ模型におけるスーパーポテンシャル$W = XYZ = M\mathcal{V}_+\mathcal{V}_-$を保つ大域対称性に他ならないことが確認できるだろう．

このようにして大域対称性が同定されると，対応した実質量（FIパラメーター）の間にも自然な同一視が得られる．超対称QEDにはゲージ結合定数という余分なパラメーターが存在したが，そのパラメーターは低エネルギーの固定点に繰り込み群のもとでフローしたとき（$g\to\infty$）になくなったので，パラメーターの数の勘定はあっている．

質量パラメーターはこの固定点のレレバント変形（relevant deformation）であり，真空のモジュライ空間を変える．例えば$U(1)_A$対称性に対応する実質量を考えると，メソンMは質量を持ちヒッグズブランチがなくなる．同様に$U(1)_J$対称性の実質量を考えると二つのクーロンブランチが消滅する．

*10) $U(1)_J$チャージを読み取る時にはその生成子の規格化に注意．ここでは周期2πに取った．

表 3.1　$N_f = 1$ SQED の場とその対称性のチャージ．

	q	$\bar{q}$	M	$\mathcal{V}_+$	$\mathcal{V}_-$
$U(1)_{ゲージ}$	1	−1	0	0	0
$U(1)_A$	1	1	−2	1	1
$U(1)_J$	0	0	0	1	−1
$U(1)_R$	0	0	0	1	1

表 3.2　XYZ 模型の場とその対称性のチャージ．

	$M = X$	$\mathcal{V}_+ = Y$	$\mathcal{V}_- = Z$
$U(1)_A$	−2	1	1
$U(1)_J$	0	1	−1
$U(1)_R$	0	1	1

ここでは真空のモジュライを使った2–3 ミラー対称性のチェックについて述べたが，ウィッテン指数によるチェック（演習問題 3.7），また $\mathbb{Z}_2$ アノマリーであるパリティ・アノマリーからのチェックもできる（演習問題 3.9）．次章では，S^3 分配関数によるチェックについて説明しよう—S^3 分配関数は 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論を解析する強力なツールであり，我々の旅にとって欠かせない仲間となるだろう．

演習問題

3.1　[♦♦]（演習問題番外編）本章の記述を参考にして，ウェス（J. Wess）とバッガー（J. A. Bagger）による教科書[4]の 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論についての記述を 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の場合に書き直せ．定性的に変わる部分はどこか？ 何か新しく付け加えるべきことはあるだろうか？

3.2　[♦]（超場の成分での展開）超場を成分に展開して式 (3.20) を確かめよ．

3.3　[♦]（3 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論）本文中よりもより超対称性の高い 3 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論を考えよう．この理論にはゲージ場を含む $\mathcal{N} = 4$ ベクトル多重項とスカラーとフェルミオンのみからなる $\mathcal{N} = 4$ ハイパー多重項が存在する．それぞれの多重項を $\mathcal{N} = 2$ 多重項に分解すると何が現れるか？

3.4　[♦]（ゲージ場の運動項の二つの表式）可換ゲージ場の運動項を表す二つの式 (3.17) と (3.18) の等価性を確かめよ．（ヒント：(3.6) を用い，二つのラグランジアン密度の違いが全微分項であることを確かめよ．）

3.5　[♦♦]（超対称理論の双対変換）第 2.2 節では 3 次元では $U(1)$ ゲージ場の双対が周期性を持つコンパクトスカラー場で与えられることを見た．これを超対称化し，3 次元の $U(1)$ ベクトル多重項がカイラル多重項に双対変換で移り合うことを示せ．

なお，同様の議論は 2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 理論に対しても実行することができ，それは堀とバッファによるミラー対称性の導出[54]の重要なステップである．

3.6　[♦]（質量項とパリティ）3 次元ではマヨラナフェルミオンの質量項がパリティ対称性を破っていることを確かめよ．このことは低エネルギーでパリティ・アノマ

リーによりチャーン＝サイモンズ項が生成されパリティを破っていることと両立している．さらに，複数のマヨラナフェルミオンが存在するとき，特殊な状況を考えることでパリティを保つことはできるだろうか？ 4次元の場合と比べるとどうか？（ヒント：3次元理論ではパリティは空間座標 $x^{1,2}$ に $x^1 \to x^1, x^2 \to -x^2$ と作用し，$x^1 \to -x^1, x^2 \to -x^2$ ではないことに注意せよ．後者は $x^{1,2}$ 平面での角度 π 回転に他ならない．）

3.7 [♦]（ウィッテン指数の一致）

ウィッテン指数（Witten index）を定義しよう：

$$I := \mathrm{Tr}(-1)^F\ . \tag{3.44}$$

レベル k チャーン＝サイモンズ項を持つ $U(1)$ ゲージ理論がチャージ q_i を持つ場 Φ_i を持つとき，そのウィッテン指数は

$$I := |k| + \frac{1}{2}\sum_i q_i^2 \tag{3.45}$$

で与えられる[53]．この公式を用い，$N_f = 1$ SQED と XYZ 模型のウィッテン指数が一致することを示せ．

（ヒント：XYZ 模型のウィッテン指数の計算のためには，全ての実質量を非零にする必要がある．）

3.8 [♦]（パリティ・アノマリーのループ計算による導出）パリティ・アノマリーについては，指数定理を用いた導出について本文中でコメントしたが，ここではより素朴に直接にループ計算によって確かめておこう．

ここでは $U(1)$ 背景ゲージ場を考える．チャーン＝サイモンズ項はゲージ場について2次であるから，その効果は対応するフォトンのプロパゲーターに現れる筈である．

(a) フォトンのプロパゲーターの内線にフェルミオンループが走るファインマン図（図3.3）からの寄与は

$$\begin{aligned}&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \frac{1}{\not p + \not q - \mu}\gamma^\rho \frac{1}{\not p - \mu}\right)\\ &\quad = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \frac{\not p + \not q + \mu}{(p+q)^2 - \mu^2}\gamma^\rho \frac{\not p + \mu}{p^2 - \mu^2}\right)\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる．

(b) ガンマ行列のトレースを考えよう．ここではパリティを破る項のみを問題

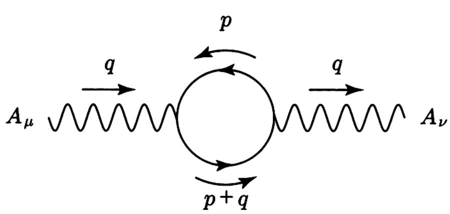


図 3.3 ゲージ場のプロパゲーターに対する1ループ補正を表すファインマン図．これは場の理論の教科書で頻繁に議論されるファインマン図であるが，3次元では4次元の時と異なるパリティを破る効果を含んでおり，それがパリティ・アノマリーを与える．

にしており，そのような項はガンマ行列が三つの時に生じる：

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = i\epsilon^{\mu\nu\rho} \ . \tag{3.47}$$

この項は 4 次元では存在しないことに注意しておこう．(3.47) の寄与を取り出すと

$$A_\mu \left(i\epsilon^{\mu\nu\rho} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{[(p+q)^2-\mu^2]\,(p^2-\mu^2)} \right) A_\rho \ . \tag{3.48}$$

(c)　積分 (3.48) は通常のファインマン図と同じようにファインマンパラメーターを導入して計算できる．詳細は省くが，使う式は

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA+(1-x)B)^2} \ , \tag{3.49}$$

$$\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2-\Delta)^2} = \frac{i}{8\pi\sqrt{\Delta}} \ , \tag{3.50}$$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - x(1-x)q^2}} = \frac{\mathrm{sgn}(\mu)}{q} \log\left(\frac{2\mu+q}{2\mu-q}\right) \ . \tag{3.51}$$

これらを用い，計算の結果は

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu q_\nu A_\rho \frac{\mathrm{sgn}(\mu)\mu}{q} \log\left(\frac{2\mu+q}{2\mu-q}\right) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{sgn}(\mu)}{2} i\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu p_\nu A_\rho \tag{3.52}$$

となり，これはフーリエ変換すると $\frac{\mathrm{sgn}(\mu)}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho$ を与える．これはレベル (3.31) を持つチャーン＝サイモンズ項に他ならない．

(d)　非可換ゲージ群の場合にはゲージ場の 3 点に対する 1 ループ補正を上と同様に計算するとチャーン＝サイモンズ項の $A \wedge A \wedge A$ の項が正しい係数で現れることを確認せよ．

(e)　上での議論は 1 ループであったが，チャーン＝サイモンズ項はトポロジカルでありそのレベルは量子化されているので高次のループは消えることが予想される．可換ゲージ群の場合にはこのことはファインマン図を使って直接の証明が与えられている[55]．

(f)　最後に，複数の大域対称性 $i, j, \ldots,$ が存在し，各フェルミオン f がチャージ $(q_f)_i$ 及び対応する質量 $(\mu_f)_i$ を持つ時には，生成されるチャーン＝サイモンズ項は対角及び非対角の成分も持ち，それが

$$k_{ij}^{\text{有効}} := k_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{f:\text{フェルミオン}} (q_f)_i (q_f)_j \mathrm{sgn}\left[\sum_i (q_f)_i \mu_i\right] \tag{3.53}$$

で与えられることを示せ．

3.9　[♦]（パリティ・アノマリーの一致）

大域対称性 $i, j, \ldots,$ をゲージ化したとき，それが問題なくできるかどうかはパリティ・アノマリーが存在するかどうか，つまり (3.53) で与えられる有効チャーン＝サイモンズレベル $k_{ij}^{\text{有効}}$ の値が半整数か整数であるかどうかで決まる：

$$k_{ij}^{\text{有効}} := k_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{f:\text{フェルミオン}} (q_f)_i (q_f)_j \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.54}$$

今仮に二つの紫外理論が存在し，同じ固定点に流れ込むとすると，大域対称性を矛

盾なくゲージ化できるかどうか，つまり $k_{ij}^{\text{有効}}$ が半整数か整数かは二つの理論で一致しなければならない．これをパリティ・アノマリーのマッチング（**parity anomaly matching**）と呼ぶ．4 次元でのアノマリーとは異なり 3 次元ではアノマリーは $\mathbb{Z}_2$ でありその制限は強くないが，それでも双対性の確認の手段としては有用である．

ここでの演習問題は，パリティ・アノマリーのマッチングを 2–3 ミラー対称性について確かめることである．より具体的には

$$k_{RR} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\,, \quad k_{RA}, k_{RJ}, k_{AJ}, k_{AA}, k_{JJ} \in \mathbb{Z} \tag{3.55}$$

であることを確かめよ．

（ヒント：(3.53) のフェルミオンはラグランジアンに存在する場全てについて取ること，カイラル超場の R チャージとフェルミオンの R チャージは 1 異なること（第 3.2.4 節参照），またベクトル超場の中にもゲージーノが存在することに注意．）

3.10 [♦]（モノポール演算子のチャージ）

本文の議論を完結させ，$\mathcal{V}_\pm$ のチャージが図 3.1 で与えられることを示せ．

3.11 [♦♦]（$\mathcal{N}=2$, $U(1)$, N_f フレーバー理論）本章ではゲージ群 $U(1)$，$N_f=1$ フレーバーの理論の真空のモジュライ空間を議論した．それでは $N_f=2$ の時はどうか，N_f がより一般の値の時はどうか．実質量を与えると真空のモジュライには何が起こるか．なお，この理論に類似した 3 次元 $\mathcal{N}=4, U(1), N_f=2$ 理論については第 5 章で触れることになる．

第 4 章
ツールとしての S^3 分配関数

曲がった空間での超対称性理論やその局所化を 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S_b^3 分配関数に焦点を置いてまとめる．量子ダイログ関数の等式と超対称ゲージ理論の間を自由に行き来できるようになるのが目標である．

4.1 関手としての分配関数

第 3 章でみてきたように，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論には数々の興味深い性質が存在した．このことは理論の持つ魅力であるが，同時にその複雑さは初学者にとっては負担にもなり得る．読者の中には既に前章で息切れしてしまった方もいらっしゃるかもしれない．前章の内容，少なくともその主要部分を保ちつつ，それをもっとシンプルな議論に置き換えることはできないだろうか？

第 1 章で述べたように，場の理論は物理量を計算する手続きを与えるものと看做すことができる．従って，例えば二つの理論が双対であることを証明するには，二つの理論のありとあらゆる物理量を列挙し，対応する物理量をそれぞれの理論で計算して一致することを示せばよい．

しかし，これは大変な計算であって現実的ではない．それならば，理論が与えられた時に，何か簡単に計算できる量を定義し，それを使って物理を代表させたらどうだろうか？

勿論，ただ 2，3 の量を計算したからといって全ての物理量の情報を不足なく含んでいると期待するのは虫がよすぎるというものであろう：これは一種の「色眼鏡」であって，このフィルターを通すことで見えなくなってしまうものもある．しかし，性質のいい量を考えれば理論の重要な情報を効率良く拾ってくることができるのではないか？ もしこれができれば，場の理論の双対性は二つの場の理論が同じ分配関数を持つという具体的な数学的等式に置き換わることになるのである（図 4.1）[*1]．同様の考え方を既に我々は使っていた：前章の 2–3

*1) より数学的には，**場の理論のなす圏**（**category**, カテゴリー）からより具体的な数や

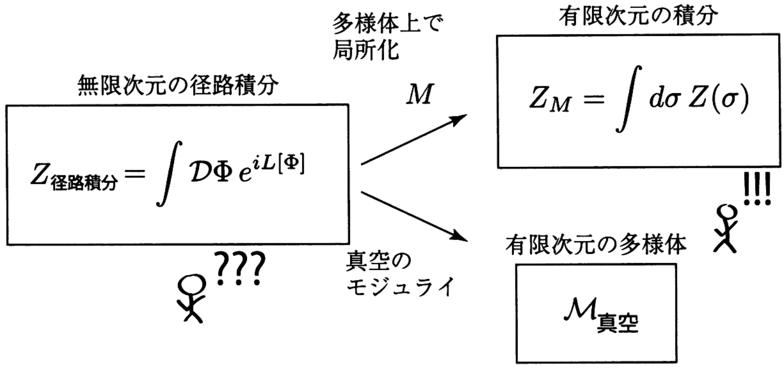


図 4.1 場の理論の情報を局所化によって計算可能な分配関数で代表させることで，無限次元の径路積分を伴った複雑な場の理論の情報は具体的な有限次元積分に関する主張に読み変わる．

ミラー対称性の議論では，二つの 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論から真空のモジュライ空間というケーラー多様体を取り出しその一致を議論したのであった．

4.1.1 何故 S^3 分配関数か

本章では前章で議論した 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論に対し，そのような性質のよい物理量の一つとして **S^3 分配関数**（**S^3 partition function**）を取り上げる．

S^3 分配関数とはその名の示すとおり 3 次元理論をユークリッド化し，それを 3 次元球面 S^3 に置いて得られる理論の分配関数である．径路積分の発散には赤外発散と紫外発散が存在する．S^3 はコンパクトな多様体でありサイズ（半径）を持つので赤外の発散は存在しない．そこで紫外の発散を適切に正則化すれば有限の量を得ることができる．これが我々の考えたい分配関数である．

紫外発散の正則化についての依存性の取り扱いには注意が必要である．実際，通常の場の理論の教科書では，分配関数は相関関数の規格化に用いられる量，あるいは（外場を加えた時）それを微分することで相関関数を得るための量として用いられており，分配関数の値自身を問題とすることはない．これは，ラグランジアンにカウンタータームを付け加える時に，その係数の値により分配関数の値が変化してしまうからである．

3 次元時空（より一般に奇数次元時空）の時は状況は異なる．S^3 の分配関数を S^3 の半径 r について展開しよう．

$$\log Z = c_3 r^3 + \cdots + c_0 r^0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) . \tag{4.1}$$

関数の圏，カテゴリーへの（完全ではない）「関手」(**functor**) であると看做すことができる（ここで圏論の用語を用いたがご存知ではない方は読み飛ばして頂いて結構である．定義自体は検索すればすぐにでてくる.）．この主張の場の理論の厳密な数学的定式化はなされていないのでここでこの理解は数学的には全く厳密ではないが，この考えは思考の枠組みとしては時に有用である．実際，場の理論のなす圏，特にそこでの射の概念を考えることにより我々は次章のドメインウォールの概念に自然に導かれる．

ここで，発散部分の係数は正則化の仕方に依存する：例えば c_3 の値はカウンタータームとして宇宙項

$$c\int d^3x\sqrt{-g} \tag{4.2}$$

を考えれば c の値に依存してしまう．しかし，定数項 c_0 はそのような曖昧さを持たない．つまり，3 次元時空の時は，微分同相写像（diffeomorphism）で不変なカウンタータームにより c_0 の値を変化させることはできない*2)：例えば，曲率 R を用いようとすると，R は計量の 2 回微分であったので質量次元 2 を持ち奇数次元では次元が合わない．そこで，「紫外正則化された」S^3 分配関数とは，実際には c_0 のことを指していると理解すればよい．

分配関数はアプリオリには無限次元の径路積分で実行されるものである．ところが，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の場合には以下に説明する**局所化（localization）**の為に，径路積分が有限次元の積分に帰着し，その積分表式はラグランジアンから**機械的**に書き下すことができる．S^3 分配関数が強力なのはこれが理由である．

この S^3 分配関数は 2009 年以降精力的に研究されてきており[57]~[59]，3 次元の様々な双対性のチェックや M2 ブレーンの $N^{3/2}$ 則の導出[60],[61]に用いられた他，**エンタングルメント・エントロピー（entanglement entropy）**との関連も知られており[62]，3 次元場の理論において繰り込み群のもとで減少する量であることも示されている（いわゆる F 定理）[63]~[65]．

なお，局所化（やその他の方法）による分配関数の有限積分表示は他の次元でもなされている．代表的なものとして，4 次元では $\mathcal{N}\geq 1$ の時 $S^1\times S^3$（4 次元 $\mathcal{N}\geq 1$ 超共形指数）[21],[22]，$\mathcal{N}\geq 2$ の時 S^4[66]，$(1+1)$ 次元では S^2[67],[68]，2 次元ディスク D_2[69]~[71]及び T^2（楕円種数，elliptic genus）[72],[73]等が挙げられる．また異なる分配関数の間に関係を付けることもできる．例えば 4 次元の $S^3/\mathbb{Z}_n\times S^1$ 分配関数の極限を取ることで 3 次元の $S^1\times S^2$ 及び S^3 分配関数，さらには 2 次元の S^2 分配関数が導かれる（文献 [74] とそこでの文献を参照）．

4.2 局所化についてのコメント

S^3 分配関数の局所化による計算について詳細に論じることはそれ自体一冊の本になり得るので，先を急ぐ本書では局所化の詳細には立ち入らない（興味を持たれた場合は例えばレビュー [75]～[78] が参考になる．また原論文 [57] も計算の詳細が丁寧に書かれており教育的である）．以下本書では読者はあくまでツールとしての局所化の結果のユーザーとして S^3 分配関数に親しむことを念

*2) 本当のところはこれは正しくなく，第 7 章で議論するチャーン＝サイモンズ項の重力版（重力チャーン＝サイモンズ項）は存在するので，その効果を正確に考慮しないと分配関数の規格化まで含めた正確な値は決定できない[56]．なお，これは物質場のないチャーン＝サイモンズ理論における**フレーミング・アノマリー（framing anomaly）**（分配関数の値が多様体のノーマル束の自明化の取り方に依存すること）の類似である．

頭に置いていただきたい．

しかし分配関数を完全にブラックボックスにするのではなく，その中身に多少の感覚を持っておくことも重要である．そこで以下では手短に分配関数の導出についてコメントしよう（但し，急ぎの読者は分配関数の積分表示（第4.3章）に直接進まれたい）．なお，以下 S^3 の半径（全体のスケール）を r と書くことにする．

4.2.1 S^3 上での超対称性

S^3 分配関数を議論するには，理論を曲がった空間である S^3 に置かなければならない．通常のラグランジアンはローレンツ計量を持つ平坦な時空 $\mathbb{R}^{2,1}$ の上で与えられているので，まず理論をユークリッド化する*3)．次に S^3 の曲率の効果を取り入れなければならない．このとき，4つの超対称チャージ $Q, \overline{Q}$ の少なくとも一つが保たれるようにしたい．以下残った超対称チャージ（のうちの一つ）をフォントを変えて $\mathcal{Q}$ と書くことにしよう．

曲がった空間上の超対称性を考えるには適切なスピノルが必要であるが，それが存在するかどうかは考える多様体に依存する．幸運なことに，S^3 上には通常の意味でのキリングスピノルは存在しないが，その親戚（例えば共形キリングスピノル（conformal Killing spinor））が存在し，それを用いて超対称変換を S^3 上で書くことができる*4)．このとき，ラグランジアンや超対称変換には半径の逆数 $1/r$ の冪を係数に持つ項が現れることになる．勿論，$r \to \infty$ として平坦な時空に戻るとこれらの項は全て消える．

超対称変換は $1/r$ の冪について逐次構成することもできるし，より系統的に超重力理論から出発しその超重力多重項の補助場に期待値を与えて構成することもできる[79],[80]．但し，本書ではこれらの詳細については述べない．

分配関数は S^3 上の計量や超重力理論の補助場の選択肢に依存するので，アプリオリには無限個のデータに依存する可能性がある．しかし実際にはそのうちごく限られたデータ（横断的正則葉層（transversely holomorphic foliation））にしか依存しないことが示されており[81]，S^3 の場合にはその変形の自由度は

---

*3) フェルミオンについてはこの解析接続はかなり微妙である．それは特定のフェルミオンが存在するかどうかは計量に依存するからである．例えば3次元のマヨラナフェルミオンはローレンツ計量では存在するがユークリッド計量では存在しない．そのためユークリッド計量に解析接続する際にはマヨラナフェルミオンの数を形式的に2倍にし，ψ と $\overline{\psi}$ を独立にしておく必要がある．

*4) 平坦な時空でのキリングスピノル方程式 $D_\mu \epsilon = 0$ を $S^3_{b=1}$ に共形変換することで，共形キリングスピノル方程式

$$D_\mu \epsilon = \pm \frac{i}{2r} \gamma_\mu \epsilon \tag{4.3}$$

が得られ，それは（符号 $\pm$ を固定した時）二つの解を持つ．この二つのスーパーチャージを用いて $S^3_{b=1}$ 上の超対称変換を書くことができる．

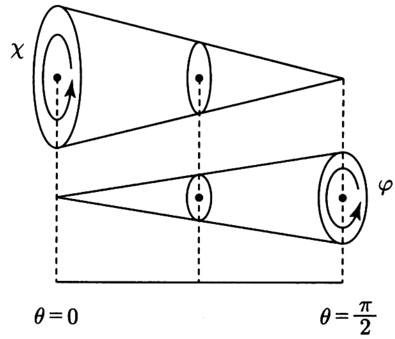


図 4.2　S_b^3 は，θ で定まる線分 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上に φ, χ で定まる $U(1)^2$ がファイバーした空間である．b の値は二つの $U(1)$ ファイバーの相対的な値を変える．

標準的な計量（丸まった計量，round metric）の 1 パラメーター変形で代表させることができる：[82]

$$S_b^3 := \left\{(x_1,\cdots,x_4)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; b^2(|x_1|^2+|x_2|^2)+b^{-2}(|x_3|^2+|x_4|^2)=r^2\right\} . \tag{4.4}$$

この計量は $b=1$ の時は $SO(4)$ アイソメトリーを持つが，$b\neq 1$ では $SO(4)$ は $SO(2)\times SO(2)$ に破れる．本書では専ら (4.4) を用いるが，分配関数の同じ 1 パラメーター変形を与える計量は全く一意ではない．例えば $SO(3)\times SO(2)$ 対称性を保った計量及びそれに付随した超対称変換の変形でも同じ答えが得られることが論文 [83] において示されている*5)．なお，半径 r についての依存性は次元解析で回復できるので，以下では簡単のため $r=1$ と取る．

具体的な計算のためには座標を取っておくと便利である．

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(\frac{1}{b}\sin\theta\sin\varphi, \frac{1}{b}\sin\theta\cos\varphi, b\cos\theta\sin\chi, b\cos\theta\cos\chi\right), \tag{4.5}$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\,,\quad 0\le\chi\le 2\pi \tag{4.6}$$

とすると，$\mathbb{R}^4$ から誘導される自然な計量は

$$ds^2=(b^{-2}\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta^2+b^{-2}\sin^2\theta d\varphi^2+b^2\cos^2\theta d\chi^2 \tag{4.7}$$

となる．これは θ で定まる線分 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上に φ, χ で定まる $U(1)^2$ がファイバーした空間である．但し，線分の両端では $U(1)$ ファイバーのうち片方がつぶれる（図 4.2）．

*5)　(4.4) で記述される S_b^3 を用いた時には，後に現れるパラメーター $Q:=b+b^{-1}$ の値が $Q\ge 2$ しか実現できないが，[83] の S^3 を用いた時にはより一般の Q の値を考えることができる．

4.2.2 局所化

さて，曲がった多様体 S^3 での超対称チャージ $\mathcal{Q}$ を保つラグランジアンができたとしよう．次なるステップとして，この $\mathcal{Q}$ を用いて径路積分の**局所化**(**localization**) を行う．

径路積分表示での分配関数は

$$Z=\int \mathcal{D}\Phi\ e^{-L[\Phi]} \tag{4.8}$$

で与えられる（但し，今ユークリッド化したので指数関数の方には i はない）．この分配関数を $\mathcal{Q}$–完全な項 $\mathcal{Q}V$ によって

$$Z(t)=\int \mathcal{D}\Phi\ e^{-L[\Phi]+t\mathcal{Q}V} \tag{4.9}$$

と変形しよう．このとき，さらに $\mathcal{Q}^2V=0$ が成り立つものとしよう．これは $\mathcal{Q}^2=0$ の場合は自動的に成り立つが，必ずしもそうでなくてもよい．実用上は $\mathcal{Q}^2$ はゼロであるか，ある方向への並進であることが殆どである．このとき，変形された分配関数の t についての微分を考えよう：

$$\frac{dZ(t)}{dt}=\int \mathcal{D}\Phi\ \left(\mathcal{Q}V\right)e^{-L+t\mathcal{Q}V}=\int \mathcal{D}\Phi\ \mathcal{Q}\left(Ve^{-L+t\mathcal{Q}V}\right)\ . \tag{4.10}$$

ここで，ラグランジアンは超対称チャージ $\mathcal{Q}$ について不変であること ($\mathcal{Q}L=0$)，また $\mathcal{Q}^2V=0$ であることを用いた．従って $Z(t)$ は t について不変であり，もともとの分配関数 $Z(t=0)$ は $Z(t)$ の $t\to\infty$ 極限で計算しても構わない*6)．

$t\to\infty$ の極限ではまず指数関数の方で t について 1 次の項が消えないといけない．つまり，条件

$$\mathcal{Q}V=0 \tag{4.11}$$

が満たされなければいけない．この場の配位を鞍点 (saddle point) と呼び，それを場の変数（の組）$\sigma(x)$ でパラメーター付けしよう．我々の分配関数には分配関数の鞍点での値が利くことになる．それを $Z_{古典}(\sigma)$ と呼ぶ．

鞍点を選ぶと指数関数の肩で $\mathcal{O}(t^1)$ の項は消える．但し，それでも $\mathcal{O}(t^0)$ の項は残る．そこで鞍点解の周りに場の揺らぎを考えることができる．鞍点の周りに展開したとき，1 次の変分は鞍点の定義から消える．従って次に現れるのは 2 次の変分であり，場の揺らぎについてガウシアンになるのでそれを積分することができる．その寄与を $Z_{1\,ループ}(\sigma)$ と呼ぶことにしよう．今の場合は $t\to\infty$ の極限を取ってよいので鞍点近似（WKB 近似）が厳密になる．

分配関数は以上二つの寄与をまとめて鞍点について積分すると得られる：

*6) これは文献でよく見られる説明であるが，正確には (1) $L(t)$ が非退化な運動項を持つ (2) 新しい鞍点が場の配位空間の無限遠方からやってこないこと，の二つを仮定する必要があり，これが満たされるかどうかには注意が必要である[84]．但し，S^3 分配関数の場合には結果的にこの論点は重要ではない．

$$Z = \int_{\text{鞍点}} \mathcal{D}\sigma \ Z_{\text{古典}}(\sigma) Z_{1\ \text{ループ}}(\sigma) \ . \tag{4.12}$$

ここまでは任意の V について成り立つかなり一般の議論であったが，一般の V を選ぶと鞍点解はまだ複雑な場の配位 $\sigma(x)$ を許す．しかし，うまい V を選んでくると鞍点解が時空について自明な依存性を持つものしか許されないことがある．このときは径路積分 (4.12) が定数 σ についての有限次元の積分

$$Z = \int_{\text{鞍点}} d\sigma \ Z_{\text{古典}}(\sigma) Z_{1\ \text{ループ}}(\sigma) \tag{4.13}$$

に落ちたことになる（つまり，$\mathcal{D}\sigma$ が $d\sigma$ に置き換わった）．このとき S^3 分配関数は有限次元積分であり，それは数学的に厳密に議論できることになる他，0 次元場の理論としての**行列模型**（**matrix model**）の様々なテクニックを援用することも可能になる．また，数値計算の手法も適用できるようになる．

我々の考える 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S_b^3（及び $S^1 \times S^2$）分配関数では結果が有限次元の積分に落ちるような V が知られている．V の取り方は一意ではないが，例えばフェルミオン ψ（ベクトル多重項のゲージーノやカイラル多重項のフェルミオン）に対して

$$V = \mathrm{Tr}\left((\mathcal{Q}\psi)^\dagger \psi + (\mathcal{Q}\overline{\psi})^\dagger \overline{\psi} \right) \tag{4.14}$$

を考えればよい．このとき

$$\mathcal{Q}V = \mathrm{Tr}\left((\mathcal{Q}\psi)^\dagger (\mathcal{Q}\psi) + (\mathcal{Q}\overline{\psi})^\dagger (\mathcal{Q}\overline{\psi}) \right) \tag{4.15}$$

となりこれは正定値であると期待され，それを具体的に確認することができる．なお，V の取り方を帰ると，同じ表式が得られることも，また見かけの異なる表式が得られることもある．

本章では扱わないが，局所化自体は積分が有限次元に落ちない場合にも有効であることを付け加えておこう．例えば，ある次元での場の理論の径路積分がそれよりも低い次元での径路積分に帰着する状況がある，第 6 章で紹介する 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の 3 次元多様体上での局所化はその良い例である．別の例として，S^4 上の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論における（S^2 上に挿入された 1/8–BPS）ウィルソン・ラインの相関関数は 2 次元ヤン＝ミルズ理論に帰着することが知られている[85]．

4.3 S^3 分配関数の積分表示

さて，S^3 分配関数の場合に具体的に局所化の後の答えをまとめておこう．

4.3.1 鞍点

鞍点の式は

$$F_{\mu\nu} = 0 \ , \quad D = \frac{\sigma}{\sqrt{b^2 \sin^2\theta + b^{-2}\cos^2\theta}} \ , \\ \sigma = \text{定数} \ , \quad \Phi = F = 0 \tag{4.16}$$

である（3 次元でのローレンツ対称性を課しているのでフェルミオンは期待値を持つことがないことに注意）．$b=1$ は簡単化して $D=\sigma=$ 定数 となる．

ここで重要なのは全ての場の鞍点での値が S^3 の座標に依らない定数であることである．従って無限次元の径路積分は有限次元の積分に落ちることになる．S^3 の基本群は自明であるので，$F_{\mu\nu}=0$ からゲージ場が（ゲージ自由度を除いて）自明であることが分かる*7)．また，カイラル超場の場 Φ, F は共に消えるのでその寄与は自明であり，非自明な値を持つのはベクトル超場のスカラー場 σ 及び補助場のスカラー場 D のみである．

4.3.2 古典部分

鞍点で非自明な値を持つスカラー場は D 及び σ のみであったので古典部分の寄与はラグランジアンの項のうち D, σ を含むもののみからくる：それはチャーン＝サイモンズ項と FI パラメーターである．

まず，チャーン＝サイモンズ項 (3.28) のうち $-2D\sigma$ からの寄与は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{超対称 CS}} &\supset \frac{k}{4\pi}\int_{S^3}(-2D\sigma) \\
&= \frac{k}{4\pi}\int_{S^3}\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{b^2\sin^2\theta+b^{-2}\cos^2\theta}} \\
&= -k\pi\sigma^2 \ .
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

但し最後は計量 (4.7) を使ってこの積分を実行した．従って分配関数への寄与は

$$
Z_{\mathrm{CS}} = \exp\left(-ik\pi\sigma^2\right) \ . \tag{4.18}
$$

より一般に非対角成分を持つチャーン＝サイモンズ理論を考えると

$$
Z_{\mathrm{CS}} = \exp\left(-i\pi\sum_{i,j}k_{i,j}\sigma_i\sigma_j\right) \tag{4.19}
$$

となる．

FI パラメーターの効果も同様にして求められる．実際，前章で見たように FI パラメーターを入れることはトポロジカル $U(1)_J$ 対称性に対する非対角チャーン＝サイモンズ項を含むことと同じであった：

$$
Z_{\mathrm{FI}} = \exp\left(-ik\pi\zeta\sigma\right) \ . \tag{4.20}
$$

1 ループ部分

1 ループ部分からの寄与は各々のカイラル多重項及びベクトル多重項の各々からの寄与の積を取ればよい．

---

*7) S^3 を離散群で割った多様体 $S^3/\mathbb{Z}_n$ を考えるとその基本群は非自明になるのでその結論は変わる[25], [86], [87]．

まず，ベクトル多重項に対応する 1 ループ部分は

$$Z_{\text{ベクトル多重項}} = \frac{1}{|W|} \prod_{\alpha:\text{ゲージ群の正ルート}} \sinh \pi b\alpha(\sigma) \sinh \pi b^{-1}\alpha(\sigma) \ . \tag{4.21}$$

但し，ここでゲージ群のルートの言葉を用いた．また，$|W|$ はゲージ群の**ワイル群**（**Weyl group**）の元の数である．より具体的に $U(N)$ ゲージ理論を考え，そのカルタン部分群を $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ で表すと正ルートは $\{\sigma_i - \sigma_j\}_{1\le i<j\le N}$ であり，

$$Z_{\text{ベクトル多重項}} = \frac{1}{N!} \prod_{1\le i<j\le N} \sinh \pi b(\sigma_i - \sigma_j) \sinh \pi b^{-1}(\sigma_i - \sigma_j) \ . \tag{4.22}$$

但し，このときワイル群は対称群 $\mathfrak{S}_N$ であり，$|\mathfrak{S}_N| = N!$ であり．特に $b = 1$ とすると

$$Z_{\text{ベクトル多重項}}\Big|_{b=1} = \frac{1}{N!} \prod_{1\le i<j\le N} \frac{1}{4}(e^{2\pi\sigma_i} - e^{2\pi\sigma_j})(e^{-2\pi\sigma_j} - e^{-2\pi\sigma_i}) \ . \tag{4.23}$$

これはゲージ群 $U(N)$ の積分測度（ハール測度（Haar measure））である．また，$U(1)$ の時は b の値に関わらず自明である：

$$Z_{\text{可換ベクトル多重項}} = 1 \ . \tag{4.24}$$

次にカイラル多重項を考えよう．大域あるいは局所対称性のもとでチャージ q_i を持つカイラル多重項を考え，その R チャージが r だとしよう．このとき，このカイラル多重項からの 1 ループ行列式への寄与は

$$Z_{\text{カイラル多重項}} = \prod_{w:\text{表現のウエイト}} s_b\left(\frac{iQ}{2}(1-r) - w(\sigma)\right) \ . \tag{4.25}$$

但し，ここで $s_b(z)$ と書いたのは付録 B で定義されている**量子ダイログ関数**であり，また引数は

$$w(\overline{\sigma}) := i\frac{Q}{2}(1-r) - w(\sigma) = -\sigma_R - w(\sigma) \ , \quad \sigma_R := -i\frac{Q}{2}(1-r) \tag{4.26}$$

なる複素化された σ で与えられる．ここで，σ_R は R 対称性の背景ベクトル多重項に付随したスカラー場の期待値と看做すことができ，その値は曲がった空間上で超対称チャージの一部を保つためにゼロでないことが要請される（これは第 6.3.1 節でのトポロジカル・ツイストの一種である）．最後に，Q は

$$Q := b + b^{-1} \tag{4.27}$$

で定義した*8)．

4.3.3 補足

ここで幾つか補足を加えておこう．

ア　S_b^3 分配関数の最も重要な性質の一つとして，**分配関数がゲージ結合定数に依存しない**ことが挙げられる．これは，ゲージ場の運動項自体が Q-完全だからである*9)．

ゲージ結合定数は紫外でのラグランジアン理論では小さな値を持つが，繰り込み群のもとで値は大きくなり赤外固定点での付近では大きくなってゆく（第 2.4 節の議論を思い出されたい）．従って，紫外理論について分配関数の計算を行えば，その値は理論の赤外固定点での分配関数の値も同時に与えることになる．赤外固定点での強結合理論は多くの場合直接ラグランジアンから記述するのは困難であるので，この事実は計算の実用上とても便利であるし，また赤外固定点でのみ成り立つ双対性の確認の為にも便利である．

イ　S^3 分配関数の積分はゲージ群のカルタン部分代数に値を持つ変数 σ についての積分として書かれた．ここで σ はベクトル多重項のスカラーのカルタン部分であり，クーロンブランチをパラメーター付けする変数でもあるのでこの分配関数の積分はクーロンブランチ上の積分であると書かれることもある．

但し，通常クーロンブランチと呼ばれるのは平坦な時空 $\mathbb{R}^{2,1}$ 上の理論の真空のモジュライ空間であって，それは曲がった時空 S^3 上に理論を置いた理論の真空のモジュライとは大きく異なることに注意が必要である．実際，例えば S^3 上ではスカラー場は S^3 の曲率のために質量を持ち（S^3 の半径を r とするとその質量は大まかに $1/r$），ヒッグズブランチはリフトされる．また，例えば FI パラメーターを導入すると平坦な時空でのクーロンブランチはリフトされるが，分配関数における σ の積分は全実数上を動く．

ウ　ここまでは S^3 分配関数のみを考えてきたが，物理量の期待値を考えることもできる．超対称チャージ Q によって保たれる物理量であれば，局所化の議論に差し支えはない．

例としてゲージ場（ゲージ対称性でもフレーバー対称性でもどちらの対称性のゲージ場でも構わない）を考え，その表現 R でのウィルソン・ループを考えることができる．ウィルソン・ループの定義は (1.6) で与えたが，ここでは超対称性を保つためにクーロンブランチ・スカラー σ も組み合わ

---

*8)　この Q は超対称チャージ Q_α の Q と紛らわしいが，どちらであるかからは文脈から明らかであると信じる．例えば関数の引数にある Q は全て (4.27) の Q の方である．

*9)　このことは一般には成立しない．例えば，4 次元 $\mathcal{N}=2$ の S^4 での分配関数[66]は非自明なゲージ結合定数依存性を持つ．

せる：

$$\langle W\rangle = \mathrm{Tr}_R \exp\left(\int_{S^1} ds\ \left[iA_\mu \dot{x}^\mu + \sigma|\dot{x}|\right]\right) . \tag{4.28}$$

但し，ここで S^1 は S^3 を T^2 ファイブレーションとして考えたときに（図 4.2）ベースとなる線分の両端 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ 上にある S^1 ファイバーのことである*10)．つまり，$\theta = 0$（$\theta = \frac{\pi}{2}$）では χ（φ）でパラメーター付けされる S^1 のことである．鞍点において $A_\mu = 0, \sigma = 0$ であるから分配関数への寄与は

$$Z_{\text{ウィルソン・ループ}} = \mathrm{Tr}_R \exp\left(2\pi b^{\pm 1}\sigma\right) \tag{4.29}$$

となる．但し，$\pm$ の符号は $\theta = 0$（$\theta = \frac{\pi}{2}$）の時負（正）を選ぶ．

(4.28) が超対称性の一部を保つことは，直接超対称変換を作用させて確認できる．A_μ, σ の S^3 上での超対称変換は，平坦な時空での超対称変換と（ユークリッド化したことを除いて）同じであり*11)，

$$\delta A_\mu = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\sigma_\mu\lambda\ , \quad \delta\sigma = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\lambda\ . \tag{4.31}$$

これは 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ での同様の式

$$\delta A_{\hat{\mu}} = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\sigma_{\hat{\mu}}\lambda\ , \quad \hat{\mu} = 0, 1, 2, 3 \tag{4.32}$$

を次元還元したものである（$(\sigma_3)_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha\beta}$ であること (3.3)，スピノルの添字の上げ下げは $\epsilon^{\alpha\beta}$ を使うこと (3.8) を思い出されたい）．従って，

$$\delta\left(iA_\mu \dot{x}^\mu + \sigma|\dot{x}|\right) = -\frac{1}{2}\,|\dot{x}|\,\bar{\epsilon}(P+1)\lambda \tag{4.33}$$

となり，ここで $P := \frac{\sigma^\mu \dot{x}_\mu}{|\dot{x}|}$ は $\frac{\dot{x}_\mu}{|\dot{x}|}$ が定数の時射影演算子 $P^2 = 1$ である．従って，S^3 上で残っている二つの超対称スピノル $\bar{\epsilon}$ のうち，$\bar{\epsilon}(P+1) = 0$ を満たす半分はウィルソン・ラインのもとで保たれる．

なお，ウィルソン・ループの双対である**ボーテックス・ループ（vortex loop）**の期待値も計算できる．S_b^3 分配関数に対しボーテックス・ループは差分作用素として作用し[89], [90]，それはウィルソン・ループとは交換せずに代数（超対称ループ演算子の代数）をなす．

エ　多様体 S^3 のトポロジーを取り換えることで別の分配関数を定義することもでき，例えば $S^2 \times S^1$ 分配関数[91], [92] やレンズ空間 $S^3/\mathbb{Z}_p$ の分配関数が考えられている．これらの分配関数は自然な分解を持ち，その表示では積分ではなく和が現れる．この分解については後に例えば第 7.2 節でコ

*10)　b^2 の値が有理数の時には，より一般のウィルソン・ループを考えることができる[88]．

*11)　ϵ で生成されるもう片方の超対称変換

$$\delta A_\mu = -\frac{i}{2}\bar{\lambda}\sigma_\mu\epsilon\ , \quad \delta\sigma = -\frac{1}{2}\bar{\lambda}\epsilon\ . \tag{4.30}$$

を考えることもできるが，結論は同様である．

メントする．

4.4 分配関数への翻訳

分配関数とは便利な道具だったので使ってみるのが何よりである．前章で議論した内容が S^3 分配関数の言葉によってどう翻訳されたかを具体的に調べてみよう．

4.4.1 複素質量

まず，複素質量を持つカイラル超場があったとき，その S_b^3 分配関数は何であるだろうか？ 物理的考察を用いればこれに答えるのは容易である．まず，S_b^3 分配関数はゲージ結合定数，従って繰り込み群のスケールに依らないのであった．次に，そのスケールがカイラル超場の質量よりも十分小さくなればそのカイラル超場は無限の質量を持つと看做せ，先に径路積分して取り除いてしまう（英語では良く integrate out と表現する）ことができる．従って，その S_b^3 分配関数は自明になる筈である．

これを具体的に確認しよう．複素質量をスーパーポテンシャル $W = m_c XY$ で表そう．但し X と Y はカイラル超場であり，特に $X = Y$ と取ればこれは見慣れた質量項である．

カイラル超場 X, Y からの 1 ループ行列式への寄与は，(4.25) に従って

$$Z_{XY} = s_b\left(\frac{iQ}{2}(1-r_X) - q_X\mu\right) s_b\left(\frac{iQ}{2}(1-r_Y) - q_Y\mu\right) \tag{4.34}$$

となる．ここで，スーパーポテンシャルは R チャージ 2，フレーバーチャージ 0 を持たなければいけないので

$$r_X + r_Y = 2\,, \quad q_X + q_Y = 0 \tag{4.35}$$

であるので，(4.34) の二つの量子ダイログ関数の引数の和は 0 であり，関係式 (B.58) から期待通り $Z_{cXY} = 1$ が従う．

4.4.2 パリティ・アノマリー

それでは今度は S_b^3 分配関数において実質量 μ を大きくしたら何が起こるかをみてみよう．分配関数 (4.25) で $\mu \to \infty$ とすると，関数 $s_b(x)$ の漸近形（付録の式 (B.59)）はチャージ q の符号に依存し（全体にかかる定数係数を今は無視して），

$$s_b(\overline{\sigma}) \xrightarrow[\overline{\sigma}\to\infty]{} e^{-\frac{i\pi}{2}\overline{\sigma}^2}\ . \tag{4.36}$$

これは，レベル $k_{有効} = \frac{1}{2}$ で与えられるチャーン＝サイモンズ項への量子補正（パリティ・アノマリー）(3.31) を示していると解釈できる．つまり，演習問題

(3.8) にあるようなパリティアノマリーの導出を全く知らなくても，数学的な変形だけから同じ事実が導かれたのである．

$\overline{\sigma}$ はフレーバー対称性のみならず R 対称性の効果も含んでいたから ((4.26) 式とそこでの説明を参照)，ここでのパリティ・アノマリーというのはフレーバー対称性に対するチャーン＝サイモンズ項に限らず R 対称性についての対角チャーン＝サイモンズ項，またフレーバー対称性と R 対称性の間の非対角チャーン＝サイモンズ項を含むことに注意しておく（後の第 9 章の (9.18) 式周辺の議論にもそれが反映される）．

4.4.3 ミラー対称性

既に述べたとおり，場の理論の双対性は分配関数の等式を意味する．前章で議論したミラー対称性の場合に，具体的な等式を書き下してみよう．

二つの理論に登場する場及びその大域対称性のもとでのチャージは前章の表 3.1 及び表 3.2 にまとめられている．まず，$N_f = 1$ SQED については二つの場 $q, \overline{q}$ から二つの量子ダイログ関数が現れること，またここで，モノポール演算子 $\mathcal{V}_\pm$ はラグランジアンに現れない場であるので S^3 分配関数には寄与しないことに注意する．$U(1)_A$ と $U(1)_J$ に対応する実質量をそれぞれ ζ, μ とすると分配関数は

$$Z_{\text{SQED}} = \int d\sigma\, e^{2\pi i\zeta\sigma} s_b\left(\frac{iQ}{2} + \sigma - \mu\right) s_b\left(\frac{iQ}{2} - \sigma - \mu\right) \ . \qquad (4.37)$$

一方 XYZ 模型の方ではカイラル多重項が三つ存在するのでそれに対応して三つ量子ダイログ関数が現れ，ゲージ理論ではないので積分は必要ない：

$$Z_{\text{XYZ}} = s_b\left(\frac{iQ}{2} - 2\mu\right) s_b\left(\mu + \zeta\right) s_b\left(\mu - \zeta\right) \ . \qquad (4.38)$$

この場合，双対性から導かれる数学的な等式は次のようになる：

$$Z_{\text{SQED}} = Z_{\text{XYZ}} \ . \qquad (4.39)$$

この式は，量子ダイログ関数の**ペンタゴン恒等式**（**五項恒等式, pentagon identity**）（付録の (B.63) 式）において $-s = r = \frac{iQ}{2} - \mu$ とすれば示すことができる．

正確には (4.39) の両辺は（μ, ζ に依存しない）定数項のファクターだけ違いがあってもよい（第 4.1 節最後の重力チャーン＝サイモンズ項についてのコメント参照）．本書では分配関数の（実質量やチャーン＝サイモンズ項のレベルに依存しない）定数項ファクターについては問題にしない．

4.4.4 次元還元

ここまで一つのパラメーター b に依存する分配関数を得ることができた．このようなパラメーターを持つ量が得られたとき，そのパラメーターの特殊値や極限で何が起こるのかを考慮するのは一般に重要である．

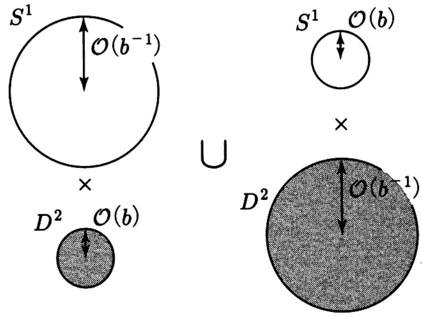


図 4.3 S^3 は，二つのソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ をその境界 T^2 に沿って S 変換で貼り合わせて得られる．$b \to 0$ の極限では，このうち一つのソリッドトーラスが $S^1_b \times D^2_{b^{-1}} \to S^1_b \times \mathbb{R}^2$ となり，3 次元場の理論は 2 次元へと次元還元される．

そのような極限として，本章の残りでは S^3_b 分配関数で $b \to 0$ の極限を考えることにしよう．付録 B の (B.27) にあるように，数学的にはこれは量子ダイログ関数が古典ダイログ関数に落ちる極限である．$b \to 0$ では量子ダイログ関数は発散するので，その積の積分である S^3_b 分配関数も，被積分関数が発散することになる．すなわち，ある関数 $\mathcal{W}(\vec{\sigma})$ が存在して，

$$Z_{S^3_b} \xrightarrow[b \to 0]{} \int d\vec{\sigma}\, \exp\left[\frac{1}{2\pi i b^2}\mathcal{W}(2\pi b\vec{\sigma}) + \mathcal{O}(b^0)\right] \tag{4.40}$$

となることが分かる．但し，$b \to 0$ の時に組み合わせ $2\pi b\sigma$ を有限に保った．分配関数の赤外発散や紫外発散は既に取り除いたのだから，改めて発散が生じるのはどういうわけだろうか？

この発散には物理的意味がある．それを見るために，S^3_b のファイブレーション構造（図 4.2）より $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ の部分と $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ の部分はそれぞれソリッドトーラス $S^1 \times D_2$ で与えられており，S^3_b はその二つの境界 T^2 を S 変換で貼り合わせて得られることを思い出そう（図 4.3）．これは S^3 の**ヘーガード分解**（**Heegaard decomposition**）である（より一般の 3 次元多様体については第 9 章を参照）．

ここで，b を小さく取ると．二つのソリッドトーラスは $S^1_b \times D^2_{b^{-1}}$ と $S^1_{b^{-1}} \times D^2_b$ とスケールする．特に，$D^2_{b^{-1}}$ の面積は b^{-2} にスケールして発散し，それが (4.40) の b の冪に反映されている．つまり，形式的に書けば

$$S^3_b \to \mathbb{R}^2 \times S^1_b\ . \tag{4.41}$$

このように，**量子ダイログ関数の古典極限** $b \to 0$ **で** S^3_b **は** $\mathbb{R}^2 \times S^1_b$ **に近づき，**S^1 **の半径は** b **で与えられる**ことが分かる．つまり，**量子ダイログ関数の古典極限は 3 次元** $\mathcal{N} = 2$ **理論の 2 次元への** S^1 **コンパクト化である．**

3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論を S^1 コンパクト化すると 2 次元 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 理論が得られ

る．但し，2 次元では回転群は $SO(2)$ でありその表現は自明なので 3 次元超対称チャージ $Q_\alpha, \overline{Q}_\alpha$ は $Q_+, Q_-, \overline{Q}_+, \overline{Q}_-$ となり，$(2,2)$ とは $+/-$ ヘリシティを持つ超対称チャージがそれぞれ二つずつあることを意味する．この理論のラグランジアンは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のラグランジアンを次元還元することで得られる．2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論については例えば [93] を参照されたい．

式 (4.40) において，$b \to 0$ の極限を取る際に σ ではなく $2\pi b\sigma$ を有限に保ったことに注意しよう．これは，2 次元極限で考えるべきは 3 次元理論のパラメーター σ ではなく，それを次元還元して得られる 2 次元理論のパラメーター $2\pi b\sigma$ だからである（既に説明したように，次元還元の際の S^1 の半径は b であった）．

関数 $\mathcal{W}(\vec{\sigma})$ はベクトル多重項スカラーのみに依存した量であり，**有効ツイステッド・スーパーポテンシャル（effective twisted superpotential）**として呼ばれる量である．2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論において，全ての物質場が質量を持つとすれば，その質量スケールよりも小さなエネルギースケールでは，物質場について先に積分（integrate out）してゲージ場とそのスーパーパートナーのみを残した理論が得られる．こうして得られる理論は，2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論で許されるラグランジアンの項である**ツイステッド・スーパーポテンシャル**を持つのである：

$$\int d\theta_+ d\bar{\theta}_-\ \mathcal{W}(\Sigma_{2\mathrm{d}}) + \int d\theta_- d\bar{\theta}_+\ \overline{\mathcal{W}}(\overline{\Sigma}_{2\mathrm{d}})\ . \tag{4.42}$$

但し，ここで $\Sigma_{2\mathrm{d}}$ は 2 次元で定義された超場

$$\Sigma_{2\mathrm{d}} := \overline{D}_+\left(e^{-V} D_- e^V\right), \quad \overline{\Sigma}_{2\mathrm{d}} := \overline{D}_-\left(e^{-V} D_+ e^V\right) \tag{4.43}$$

である．これは (3.19) の線形多重項 Σ の次元還元と $\Sigma \leftrightarrow \Sigma_{2\mathrm{d}} + \overline{\Sigma}_{2\mathrm{d}}$ のように関係しており，$\Sigma_{2\mathrm{d}}$ の最低次成分 $\sigma_{2\mathrm{d}}$ は複素スカラーである．このスカラーは 3 次元でいうとモノポール演算子の定義 (3.35) に現れた組み合わせ $\sigma + i\gamma$ であり，特にその虚部は周期 g^2 を持つ（演習問題 4.8）．

ツイステッド・スーパーポテンシャルの具体形は (4.40) を用いて計算でき，それは 2 次式及び量子ダイログ関数の和で与えられる：

$$\mathcal{W}(\vec{\sigma}) = (\sigma \text{ の 2 次式}) + \sum \mathrm{Li}_2\ . \tag{4.44}$$

2 次式の部分の意味は簡単である：これは 3 次元（S_b^3）ですでに存在した（(4.18) 及び (4.19) 参照）2 次式由来のもので，それはすなわちチャーン=サイモンズ項の次元還元である．

それでは量子ダイログ関数の極限（(B.27) 参照）である古典ダイログ関数の部分はどうだろうか？ ここで手がかりとなるのは，S^3 分配関数での 1 次式部分が FI パラメーターを表していたことである（(4.20) 参照）．FI パラメーターは次元還元しても依然として FI パラメーター $\zeta_{2\mathrm{d}}$ であるが，2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論ではゲージ場のテータ角

$$\mathcal{L}_{\text{テータ角}} = \int \frac{\theta}{2\pi} F_{01} \tag{4.45}$$

によって複素化されることになる*12)．それを t と書こう：

$$t := \zeta_{2\mathrm{d}} - i\theta \ . \tag{4.46}$$

さて，FI パラメーターについて述べてきたのは，ツイステッド・スーパーポテンシャルに古典ダイログ関数が存在すると，その効果は FI パラメーター t の値を変える効果として理解できるからである：

$$t_{\text{有効 FI}}(\sigma) := \frac{\partial \mathcal{W}(\sigma)}{\partial \sigma} \ . \tag{4.47}$$

ここに $\mathcal{W} \sim \mathrm{Li}_2(-e^{\sigma})$ を代入すると，

$$t_{\text{有効 FI}}(\sigma) \sim \log \sinh(\sigma) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(\sigma + \frac{in}{R}\right) \ . \tag{4.48}$$

但し，途中で双曲サイン関数の無限積表示

$$\sinh(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) \tag{4.49}$$

を用いた．最後の式 (4.48) は 3 次元理論の S^1 コンパクト化から理解できる：整数 n についての和は KK モード（S^1 方向のフーリエモード）の足し上げを，また $\log(\sigma)$ の項は物質場を積分した時に，FI パラメーターに対する 1 ループ補正を表している*13)．こうして (4.44) の構造が理解できたことになる．

ツイステッド・スーパーポテンシャルが得られると，2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ の理論の真空を決定できる：

$$\exp\left(\frac{\partial \mathcal{W}(\vec{\sigma}_{2\mathrm{d}})}{\partial \vec{\sigma}_{2\mathrm{d}}}\right) = 0 \ . \tag{4.50}$$

これは，有効 FI パラメーター (4.47) の言葉ではその虚部テータ角 θ の周期性を表していると解釈できる*14)．こうして得られた 2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ の理論（共形場理論の質量パラメーター*15) による変形）の真空はモジュライを持たず，孤立した点の集まりとなる．

3 次元 S^3 分配関数の極限を取ることで，2 次元ツイステッド・スーパーポテ

---

*12) 3 次元では FI パラメーターは $U(1)_J$ 大域対称性に対する非対角チャーン＝サイモンズ項と理解できた．非対角チャーン＝サイモンズ項 $\int A \wedge F$ は次元還元すると $\int F$ を与える．

*13) $\mathcal{N} = (2,2)$ 理論についての非繰り込み定理によって，摂動論の全ての次数でこの結果は正しい．またゲージ群が可換の時には非摂動効果も存在しないので，この結果は厳密であると期待される[43]．

*14) より物理的には，2 次元でのテータ角は定数電場を真空に引き起こすが，対生成の効果によってそれの効果の一部が打ち消されて周期性が現れる[94]．文献 [94] で明快に説明されているように，これは 2 次元での特殊性である．

*15) この質量は 3 次元での実質量の 2 次元版で，ツイステッド質量（**twisted mass**）と呼ばれる．

ンシャルについての様々な性質を導くことができる．前章で議論した性質や双対性の一つ一つについてこれを実行することは練習問題としておこう．

例えば，前章で議論した $2-3$ ミラー対称性を表す量子ダイログ関数のペンタゴン恒等式は，$b\to 0$ の極限で古典ダイログ関数のペンタゴン恒等式に帰着することが示せる（付録 B 参照）．

ここまで見てきたように，S^3 分配関数は比較的取り扱いが容易な量であり，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論についてかなりの情報を含んでいた．特に，S^3 分配関数は量子ダイログ関数で書かれており，**量子ダイログ関数の関係式を 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論についての主張に読み替えることができる**．実はこの方法を徹底すると，3 次元・3 次元対応のかなりの部分を量子ダイログ関数の既知の数学的等式だけから推察することができる（第 9 章参照）．腕に覚えのある読者は，次の章を読み進める前にここまでの内容と付録 B だけを使って何ができるか考えて欲しい（演習問題 4.9）．しかし本書では我々は多少異なる道筋を取ることにし，第 1 章で述べたゲージ化の概念に再度立ち返ることにしよう．その過程で，ダイログ関数の等式の背後にどのような物理的・数学的構造があるのかが徐々に明らかになっていくであろう．

演習問題

4.1 [♦]（3 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の S^3_b 分配関数）3 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論での 1 ループ行列式を求めよ．特に

$$Z_{\mathcal{N}=4\ \text{ベクトル多重項}} = Z_{\mathcal{N}=2\ \text{ベクトル多重項}} \tag{4.51}$$

であること，また $b=1$ としたとき，

$$Z_{\mathcal{N}=4\ \text{ハイパー多重項}} = \frac{1}{2\cosh\pi(\sigma+ir)} \tag{4.52}$$

であることを確かめよ．（ヒント：前者は $\mathcal{N}=4$ 多重項の中の $\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項の分配関数が自明であることを意味している．これは，このような $\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項の R チャージが 1 であること（ゲージ場の R チャージは 0 でなければならないことに関係している）を思い出すと (4.34) 式周辺での議論に帰着する．なお，3 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性の多重項については演習問題 3.3 及び付録 A を参考のこと．）

4.2 [♦]（双対性と S^3_b 分配関数の等式の例）等式

$$\int d\sigma \frac{e^{2\pi i\zeta\sigma}}{2\cosh\pi\sigma} = \frac{1}{2\cosh\pi\zeta} \tag{4.53}$$

が成立することを数学的に確かめよ．また，この式が二つの 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 次元超対称ゲージ理論の間の $S^3_{b=1}$ 分配関数の双対性を表すことを確かめよ．

4.3 [♦♦]（より一般のアーベリアン・ミラー対称性）次の二つの 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が双対であることを $S^3_{b=1}$ 分配関数のレベルで確かめよ（この双対性は文献 [95] による）．

一つの理論においては，ゲージ群は $U(1)^r$，また N 個のカイラル多重項 q_i を持ち

そのチャージは R_i^a ($i=1,\cdots,N,\ a=1,\cdots r$) とする．この理論にはチャーン=サイモンズ項 κ_{ab}，r 個の FI パラメーター ζ_a，$N-r$ 個の実質量 m_i を考えることができる．但し，m_i 自体は N 個のパラメーターであるが，そのうち r 個はゲージ変換により吸収できるので $N-r$ 個のみが自明でないパラメーターである．

もう一つの議論では，r を $N-r$ で取り替える．つまり，ゲージ群は $U(1)^{N-r}$，また N 個のカイラル多重項 $\overline{q}_i$ を持ちそのチャージは S_i^u ($i=1,\cdots,N,\ u=1,\cdots N-r$) とする．この理論にはチャーン=サイモンズ項 $\overline{\kappa}_{uv}$，$N-r$ 個の FI パラメーター $\overline{\zeta}_u$，r 個の実質量 $\overline{m}_i$ を考えることができる．

これら二つの理論が双対であるためには，条件

$$\sum_{i=1}^{N} R_i^a S_i^u = 0 \tag{4.54}$$

が必要である．また，パラメーターは例えば ζ_a と $\overline{m}_i$，m_i と $\overline{\zeta}_u$ を適切に同一視する必要がある．

4.4 [♦] (ABJM 理論の S_b^3 分配関数) 3 次元の ABJM (Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena) 理論[96]と呼ばれる次の理論を考えよう．3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の言葉では，ゲージ群は $U(N)_k \times U(N)_{-k}$，但し二つのゲージ群はレベル k と $-k$ を持つ．このゲージ群の元で $(N,\overline{N})$ で振る舞うカイラル超場 A_1, A_2 及び $(\overline{N},N)$ のもとで振る舞う場 B_1, B_2 を考えよう．この理論は適切にスーパーポテンシャルを選ぶことで実は 3 次元 $\mathcal{N}=6$ 超対称性を持つ．このとき対応する $S_{b=1}^3$ 分配関数の形を求め，それが

$$\begin{aligned} Z_{\text{ABJM}} = \frac{1}{(N!)^2} \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d\sigma_j}{2\pi} \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d\rho_j}{2\pi} \\ \frac{\prod_{1\le j<k\le N} \left(2\sinh \pi(\sigma_j-\sigma_k)\right)^2 \left(2\sinh \pi(\rho_j-\rho_k)\right)^2}{\prod_{1\le j,k\le N} \left(2\cosh \pi(\sigma_j-\rho_k)\right)^2} e^{-i\pi k\left(\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2-\sum_{j=1}^{N}\rho_j^2\right)} \end{aligned} \tag{4.55}$$

であることを示せ．但し，大域対称性に対応する実質量は全てゼロに取った．次に，$k=1, N=1,2$ の時に積分を (例えば，留数定理を用いることで) 実行せよ (ヒント：論文 [97]．この問題でより一般の N の場合には筆者自身も [98] で考えたので個人的な思い入れがある．レビュー [99] も参考のこと)．

4.5 [♦] (量子ダイログ関数と数値計算) 付録 B の量子ダイログ恒等式の幾つかについて，(適当な変数の値を設定して) 数値計算でがペンタゴン恒等式が成立していることを確かめよ．一般に $s_b(x)$ の等式が成立するかどうかを証明するのは容易ではないが，このように数値計算で確認する作業は実際上有用である．

なお，S^3 分配関数は一般に量子ダイログ関数の積分で書かれているが，$b=1$ とすると量子ダイログ関数は古典ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ を用いて書くことができる ((B.61) 参照)．これは便利な極限であるが，実際には $b=1$ での量子ダイログ関数はその位相が早く振動するので $b=1$ での数値計算には工夫が必要になる．

4.6 [♦] (チャーン=サイモンズ項の次元還元) 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のチャーン=サイモンズ項を考え，その次元還元を考えよう．このとき 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論のツイステッドスーパーポテンシャルを求めよ．

4.7 [♦] (2 次元での $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換) 3 次元理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ は，次元還元することで 3 次元 $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を誘導する．この作用はツイステッド・スーパーポテンシャルにどう作用するか？ その作用が S^3 分配関数の $b\to 0$ 極限から得られた結果と両

立することを確かめよ．

4.8　[♦]（2 次元のツイステッド多重項）2 次元での多重項を (4.43) により定義したとき，3 次元の (3.19) の線形多重項 Σ の次元還元と $\Sigma \leftrightarrow \Sigma_{\mathrm{2d}} + \overline{\Sigma}_{\mathrm{2d}}$ と同定されることを示せ．またそれを成分に展開し，Σ_{2d} の最低次成分 σ_{2d} は 3 次元でいうとモノポール演算子の定義 (3.35) に現れた組み合わせ $\sigma + i\gamma$ であることを示せ．

4.9　[♦♦]（量子ダイログ関数から 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論への翻訳）付録 B 及びそこでの参考文献に述べられている量子ダイログ関数の性質の各々について，3 次元超対称 $\mathcal{N}=2$ 理論への翻訳ができるかどうか考えてみよ．

第 5 章
ドメインウォールの物理

本章では，前章で議論した S_b^3 分配関数が 1 次元量子力学の波動関数として再解釈できることをみる．次に，その起源は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の境界（ドメインウォール）であることを説明する．このとき，3 次元理論の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換は 4 次元理論の双対変換と同定され，またこの設定を超対称化した時，S_b^3 分配関数は S_b^4 分配関数に作用する演算子に同一視されることになる．

5.1 $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用再訪

前章では S_b^3 分配関数を導入したが，それは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を調べるためのツールであった．第 2 章及び第 3 章において我々は 3 次元理論のゲージ化を議論し，そこで $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用を導入したが，その作用が S_b^3 分配関数というフィルターを通すことでどう見えるようになるのかを調べてみよう．

第 2 章での記法に従って，$U(1)$ 大域対称性の背景ゲージ場 $A_{背景}$ とカップルする 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考え，ゲージ場 $A_{背景}$ を含むベクトル多重項 $V_{背景}$ のクーロンブランチ・スカラーを σ，3 次元理論の分配関数を $Z(\sigma)$ と書こう．

このとき，T^k の作用は $A_{背景}$ にレベル k のチャーン＝サイモンズ項を足すことを意味したので，(4.18) を思い出すと

$$T:\ Z(\sigma)\to Z(\sigma)\,e^{-ik\pi\sigma^2}\ . \tag{5.1}$$

一方，S の作用は非対角チャーン＝サイモンズ項を足すことに対応するので，新しく導入された背景ゲージ場を含むベクトル多重項のクーロンブランチ・スカラー σ' によって（(4.19) 参照）

$$S:\ Z(\sigma)\to Z'(\sigma')=\int d\sigma\ e^{-2i\pi\sigma\sigma'}Z(\sigma) \tag{5.2}$$

と書かれる．つまり，$SL(2,\mathbb{Z})$ 行列の S 変換は S_b^3 分配関数のフーリエ変換を

与える．

これらの具体的な表式から，上で定義した S, T が S_b^3 分配関数のレベルで $SL(2,\mathbb{Z})$ の関係式 (1.16) を満たすことは容易に確認できる．これはラグランジアンレベルでの第 2 章での議論とほぼ同じである．例えば $S^2 = C$ であることは S がフーリエ変換であり，従って S^2 は自明であることから直ちに従う：

$$S^2 : Z(\sigma) \to \int d\sigma' e^{-2i\pi\sigma'\sigma''} \int d\sigma\, e^{-2i\pi\sigma\sigma'} Z(\sigma) . \tag{5.3}$$

これは σ' について先に積分すると

$$\int d\sigma\, \delta(\sigma + \sigma'') Z(\sigma) = Z(-\sigma'') .$$

これより $S^2 = C$ が確認できた．なお，荷電共役 C が σ の符号を反転することは，σ がゲージ場と同じ超対称多重項にあること（従って同じ変換性を示すこと），またゲージ場 A_μ は今の規格化ではチャージを含んでおり（共変微分に $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu + \cdots$ のように現れる），そのチャージは荷電共役変換で符号を変えることに気づくと納得できる．

同様にして $(ST)^3 = 1$ を示すことも容易である（演習問題 5.1）．このように，$Sp(2n,\mathbb{Z})$ の作用は S^3 分配関数に対する単純な作用として理解できることになる．

それでは，一般の $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を繰り返すと，その変換はどのような形をしているだろうか？ 例えば行列

$$M = T^k S T^l S = \begin{pmatrix} kl-1 & -k \\ l & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

を考えよう．このとき，波動関数 $Z(\sigma)$ は

$$Z_{\mathrm{new}}(\sigma'') = \int d\sigma'\, e^{-2i\pi\sigma''\sigma'} e^{-il\pi\sigma'^2} \int d\sigma\, e^{-2i\pi\sigma'\sigma} e^{-ik\pi\sigma^2} Z(\sigma) . \tag{5.5}$$

但し，$SL(2,\mathbb{Z})$ 行列の積は左から右へ読むことに注意しよう．例えば最初に T^k の作用を考え，次が S である．式 (5.5) は σ' についてガウシアン（2 次）であるので積分できて，その結果は (全体にかかる定数項を除いて，演習問題 5.3 を参照)

$$Z_{\mathrm{new}}(\sigma'') = \int d\sigma''\, e^{2i\pi\left(\frac{1}{2l}\sigma''^2 + \frac{1}{l}\sigma''\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}-k\right)\sigma^2\right)} Z(\sigma) \tag{5.6}$$

となり，指数関数の肩に 2 次式をのせた積分核によって表された積分作用素が現れた．

この計算は一般化できる．一般に $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考え，

$c \neq 0$ としよう．$SL(2,\mathbb{Z})$ 行列で $c=0$ の時 M は T^k の形に書け，その場合の波動関数の変換は既に分かっていたのでこの仮定によって一般性は失われない．このとき，M に対応する分配関数への作用は

$$Z_{\rm new}(\sigma') = \int d\sigma \, e^{2\pi i W_M(\sigma',\sigma)} \, Z(\sigma) \tag{5.7}$$

と書け，$W_M(\sigma',\sigma)$ は再び 2 次式である：

$$W_M(\sigma',\sigma) := -\frac{1}{2}\frac{d}{c}\sigma'^2 + \frac{1}{c}\sigma'\sigma - \frac{1}{2}\frac{a}{c}\sigma^2 \ . \tag{5.8}$$

先程の例 T^kST^lS の場合にはこの式は正しい答えを与える．また，$SL(2,\mathbb{Z})$ での積が上の作用素の積と両立することも確認できる．つまり，二つの $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列 M_1, M_2 について

$$\begin{aligned} &\int d\sigma' \, e^{2\pi i W_{M_2}(\sigma'',\sigma')} \int d\sigma \, e^{2\pi i W_{M_1}(\sigma',\sigma)} \, Z(\sigma) \\ &\qquad = \int d\sigma'' \, e^{2\pi i W_{M_1 M_2}(\sigma'',\sigma)} \, Z(\sigma) \end{aligned} \tag{5.9}$$

(演習問題 5.2)．このことと，S, T が $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を生成することから，行列を S と T の積に書いたときの S の数に関する帰納法によって (5.7) 及び (5.8) を証明できる．

ここまでの計算で我々は何を得たのだろうか？ 実は積分核に現れる関数 $W_M(\sigma',\sigma)$ は正準変換の生成子であり，それは解析力学でお馴染みのものである．実際，(5.8) から正準運動量 p, p' を

$$\begin{aligned} -p' &:= \frac{\partial W_M(\sigma',\sigma)}{\partial \sigma'} = -\frac{d}{c}\sigma' + \frac{1}{c}\sigma \ , \\ p &:= \frac{\partial W_M(\sigma',\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{a}{c}\sigma + \frac{1}{c}\sigma' \end{aligned} \tag{5.10}$$

により定義すると，

$$(\sigma' \ p') = (\sigma \ p) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{5.11}$$

これは正準変数の組 (σ, p) から別の組 (σ', p') への正準変換に他ならない．

このことに気づくと，積分変換 (5.7) が正準変換の量子力学版であることも分かる．実際，$-2\pi i F(\sigma) := \log Z(\sigma)$ と書くと，(5.7) は

$$e^{-2\pi i F_{\rm new}(\sigma')} = \int d\sigma \, e^{2\pi i \left(W_M(\sigma',\sigma) - F(\sigma)\right)} \tag{5.12}$$

となり，特に鞍点近似を取ると鞍点では

$$p := \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial W_M(\sigma',\sigma)}{\partial \sigma} \tag{5.13}$$

が成立し先程の定義 (5.10) に一致する．またこの鞍点近似では (5.12) は例えば

熱力学でおなじみのルジャンドル（Legendre）変換に他ならない．

より直接に，変換 (5.7) 自体も波動関数の変換として理解できる．位置演算子 $\hat{\sigma}$ 及びそれに共役な運動量演算子 $\hat{p}$ は正準交換関係

$$[\hat{\sigma}, \hat{p}] = i\hbar \,, \quad [\hat{\sigma}, \hat{\sigma}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \tag{5.14}$$

を満たし，それは波動関数 $Z(\sigma)$ に

$$\hat{\sigma} Z(\sigma) = \sigma Z(\sigma) \,, \quad \hat{p}\, Z(\sigma) = -\frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\sigma} Z(\sigma) \tag{5.15}$$

により作用する．また $\hat{\sigma}'$ 及び $\hat{p}'$ も $Z_{\rm new}(\sigma')$ に同様に作用する（但しプランク定数を $\hbar = \frac{1}{2\pi}$ と取った）．これらの事実は (5.7) のもとで (5.11) 及びその演算子版と両立している．例えば，

$$\begin{aligned} &(a\hat{\sigma} + b\hat{p})\, Z_{\rm new}(\sigma') \\ &\quad = \int d\sigma \left(a\sigma + b\frac{\partial W_M(\sigma', \sigma)}{\partial \sigma} \right) e^{2\pi i W_M(\sigma', \sigma)} Z(\sigma) \\ &\quad = \int d\sigma \; (a\sigma + bp)\, e^{2\pi i W_M(\sigma', \sigma)} Z(\sigma) \\ &\quad = \int d\sigma\, \sigma' e^{2\pi i W_M(\sigma', \sigma)} Z(\sigma) = \hat{\sigma}' Z_{\rm new}(\sigma') \,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

特に，$M = S$ の時には対応する正準変換は位置と運動量を入れ替え，(5.7) はこの場合フーリエ変換になるのは既に述べた通りである．

こうして分かったことは，**我々の S_b^3 分配関数はあるヒルベルト空間の状態を指定する波動関数であるということ**，さらに変換 (5.7) は波動関数が正準変換のもとでどう変換するかを表しているということだ．つまり，

$$Z(\sigma) = \langle \sigma | Z \rangle \in \mathcal{H}_{S^3} \,. \tag{5.17}$$

但し，ヒルベルト空間を今後 $\mathcal{H}_{S^3}$ と書くことにする．この立場に立つと，分配関数の変換則 (5.7) は

$$\int d\sigma \, \langle Z | \sigma' \rangle \langle \sigma' | \sigma \rangle = \langle Z | \sigma \rangle \,, \quad \langle \sigma' | \sigma \rangle := e^{2\pi i W_M(\sigma', \sigma)} \tag{5.18}$$

となり，これはすなわち量子力学でお馴染みの**状態 $|\sigma\rangle$ の完全性の条件**

$$\int d\sigma \, |\sigma\rangle\langle\sigma| = 1 \tag{5.19}$$

に他ならない．つまり，**状態 $|\sigma\rangle$ の選択は量子力学の偏極の選び方に依存するが，それを正準変換 $Sp(2n, \mathbb{Z})$ によって取り替えると対応して 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論に $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換が引き起こされる**のである．

以下幾つか補足しておこう．

ア　**第 4.4.4 節における S_b^3 分配関数の次元還元 $b \to 0$ を本節での半古典極限と同定することができる**．実際，半古典極限は量子力学における鞍点近

似であったが，それはまさに第 4.4.4 節で考えたことであった（(4.40) を思い出せ）．

イ　数学的には (5.7) は正準変換の群 $Sp(2,\mathbb{R})$ から有限次元ヒルベルト空間上の演算子への射影ユニタリー表現*1) を与えているとみることができる*2)．実際，(5.9) から，行列 M に対応するユニタリー演算子を $\widehat{M}$ と書いたとき，

$$\widehat{M_1} \circ \widehat{M_2} = \widehat{M_1 \cdot M_2} \tag{5.20}$$

が従っていた．但し，ここで $\circ$ はユニタリー演算子の積であり，$\cdot$ は行列の積である*3)．

ウ　通常の量子力学の教科書で扱われている問題では，殆どの場合位置や運動量の選択に自然なものが（例えば，観測の都合上）存在するので，一般の $SL(2,\mathbb{R})$ 変換を考えることは必要ではない．

しかし，これは量子化の一般論からすると特殊な状況であり，実際本書で後に議論する量子力学系ではそのような標準的（自然，canonical）な位置と運動量の選択肢は存在しない．そこで，量子化に当たってはまずどの変数を位置及び運動量と看做すかを指定してやる必要がある．これを**偏極**（**polarization**）と呼んでいる．我々が議論した $Sp(2n,\mathbb{R})$ 変換はこの偏極の取り替えを表している．

エ　3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論からは $Sp(2n,\mathbb{R})$ 変換のうち $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換のみを考えた．これは元はといえばチャーン＝サイモンズ項のレベルの量子化に起因するものである．後に次章で議論する 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の立場では，これは基本的にディラック（Dirac）量子化条件である．

5.2 ドメインウォールとしての 3 次元理論

5.2.1 ドメインウォール演算子

ここまで，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}$ の $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用の元での同値類 $[\mathcal{T}]$ を状態 $|\mathcal{T}\rangle$ と同定してきた．

この考えをもう少し推し進めると，$[\mathcal{T}]$ をさらにヒルベルト空間の演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ と看做すこともできる．3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が，これまで用いてきた $U(1)$ 大域対称性に加えてさらに別の $U(1)$ 大域対称性を持つものとしよう．このとき，

---

*1)　量子力学では状態はヒルベルト空間の射（ray）で指定される，つまり波動関数を定数倍しても状態は保たれる．従って表現においても定数倍は無視され，表現は射影表現になる．射影表現を通常の意味での表現に持ち上げるには $Sp(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆である**メタプレクティック群**（**metaplectic group**）$Mp(2,\mathbb{R})$ を考える必要がある[100]~[102]．

*2)　この表現は忠実（faithful）である．

*3)　メタプレクティック群のユニタリー演算子としての表現は量子力学以前にもその先駆けである光学において自然に現れ，フレネル光学は数学的にはメタプレクティック群 $Mp(4,\mathbb{R})$ の表現に他ならない．この例は物理的にとても教育的である（文献 [103, Chapter1] を見よ）．

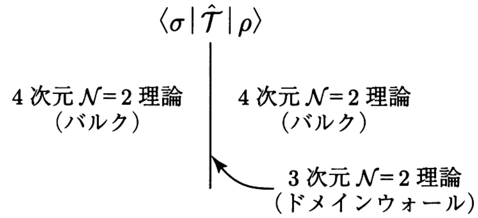


図 5.1 二つの 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の間にあるドメインウォールに 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}$ が存在する．このとき，バルク理論に対応する二つの状態 $|\sigma\rangle, |\rho\rangle$ に演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ が作用し，その期待値が 3 次元理論の S_b^3 分配関数を与える．

(5.17) は二つの変数 σ, ρ に依存するものになる筈で，$\langle\sigma|-\rangle$ とも $\langle-|\rho\rangle$ とも書かれる筈である．そこで，これらを総合して得られる式は（図 5.1）

$$Z(\sigma,\rho) = \langle\sigma|\hat{\mathcal{T}}|\rho\rangle\ . \tag{5.21}$$

但し，$\hat{\mathcal{T}}$ は分配関数を表す演算子であり，理論 $\mathcal{T}$ から決定される．

これをまとめると，（$U(1)\times U(1)$ 大域対称性を持つ）**3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}$ の S_b^3 分配関数は，ある量子力学系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3}$ に作用する演算子 $\hat{\mathcal{T}}\in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_{S^3})$ の期待値で与えられる．**

量子ダイログ関数の恒等式に動機付けられて，我々は 3 次元ゲージ理論 $\mathcal{T}$ をあるヒルベルト空間の演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ として看做すという立場に辿り着いた．この考え方を具体的な 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に適用することもできる．例えば，第 4 章で議論した 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ミラー対称性は量子ダイログ関数のペンタゴン関係式で表現されたが，後者はその演算子版から従うことが知られており，自然に演算子としての恒等式に持ち上がる（これについては後に第 9.3.1 節でコメントする）．

今のところの考察はあくまで数学的であった．そもそも「あるヒルベルト空間」とは何であって，どのように現れるだろうか？ 3 次元場の理論がそのヒルベルト空間に作用する演算子であるとはどういうことか？ 特に後者は突拍子も無い考えに見える．場の理論を固定したときにヒルベルト空間が現れそこに演算子が作用するという状況ならば場の理論の教科書で頻繁に登場するが，ここで問題にしているのは場の理論**そのもの**が演算子としての役割を果たすという状況である．

実は，これらの問いに答えることはそれほど難しくない．まず，今まで数であった分配関数をあるヒルベルト空間の演算子に持ち上げるには，次元を一つ上げて 4 次元にすればよい*4)．増えた方向を時間だと思って 4 次元理論を正準量子化すれば残りの 3 次元部分にヒルベルト空間が現れるからである．

次に，ヒルベルト空間の演算子とは，あるヒルベルト空間から別のヒルベル

*4) より数学的にいえば，次元を上げることは圏化（**categorification**）の一種である．

ト空間への写像であった．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は 4 次元場の理論，演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ は 3 次元場の理論 $\mathcal{T}$ に対応したのであったから，対応して**3 次元場の理論は二つの 4 次元場の理論の間に挟まれたドメインウォール（domain wall）**であると考えればよい*5)．

言い方を変えれば，これは二つの 4 次元場の理論の相互関係を調べるには，その二つの間のドメインウォールとして何が現れるかを調べればいいということである．これは物理的に自然な考え方である—二つの物質の間の相互関係を知りたければ，その二つの物質をくっつけてみればいいのだ*6)．

なお，この設定ではしばしば 4 次元のことを 3 次元ドメインウォールに対比させて**バルク（bulk）**と呼ぶ．

境界の 3 次元理論が $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持っていたので，バルクの 4 次元理論も超対称性を持つと考えるのが自然である．バルクの立場からすると，境界の存在は 4 次元のローレンツ対称性の一部を破るので，4 次元超対称性の一部も破ることになる（交換関係 (3.2) から分かるように，超対称チャージの交換関係から並進の生成子を得ることができることに注意）．

5.2.2 双対性ドメインウォール

ドメインウォールについて一般的に考えてみよう．ドメインウォールとは余次元 1 の壁のことであった．二つの 4 次元場の理論 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ が与えられたとき，それを $\mathbb{R}^{3,1}$ の $x^3>0$ の部分と $x^3<0$ の部分に置くことにしよう．このとき，両理論の境界 $x^3=0$ にはそこに局所化した自由度が現れるとしよう．このとき 3 次元ドメインウォール上には何かの理論が現れることになる．これがドメインウォール上の理論である．これを $\mathcal{T}_{1,2}$ と書くことにしよう．

ドメインウォールは二つの 4 次元場の理論をつなぐものであるので，形式的にはその二つの間の写像（射），すなわち

$$\hat{\mathcal{T}}_{1,2} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \tag{5.22}$$

と看做すのが自然である．但し，理論 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ は向き付けが逆であるので対称ではない．両者の位置を $x^3<0, x^3>0$ に関して入れ替えると $\mathcal{T}_{1,2}$ の逆元

$$\hat{\mathcal{T}}_{2,1} = \hat{\mathcal{T}}_{1,2}^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1) \tag{5.23}$$

が得られることになる．

ドメインウォールとしての解釈から自然にその間の積構造が従う．つまり，

*5) ドメインウォールは余次元（codimension）1 を持つ．一般に，ドメインウォール以外でも様々な余次元を持つ欠陥を考えることができる：例えば，第 2 章でも議論したボーテックスは余次元 2 を持つ．これらの欠陥のなかでドメインウォールが特別なのは，余次元 1 なのでその両側に異なる理論を考えることができる点である．

*6) もっとも，ドメインウォール上の自由度はその両側の 4 次元理論を指定しても一意に定まらず，かなり巨大な自由度が存在する．

二つのドメインウォール

$$\hat{\mathcal{T}}_{1,2} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)\ , \quad \hat{\mathcal{T}}_{2,3} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3) \tag{5.24}$$

が与えられたとき，$\mathcal{T}_2$ に対応する領域の体積を減らしていき，二つのドメインウォールが一致する状況を考えよう．この結果 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_3$ を与えるドメインウォールが与えられるので，それは $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ の元を定義する．これを $\hat{\mathcal{T}}_{1,2} \circ \hat{\mathcal{T}}_{2,3}$ と定義することにしよう：

$$\hat{\mathcal{T}}_{1,2} \circ \hat{\mathcal{T}}_{2,3} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)\ . \tag{5.25}$$

これが二つのドメインウォールの間の積である[*7)]．

このようにドメインウォールの間には自然な積構造がはいり，その全体はある代数をなす．より数学的には，我々は「場の理論の圏」を得たといえる．つまり，この圏の対象は個々の場の理論で与えられ，二つの場の理論の間の射にあたるのは場の理論の間のドメインウォールである．

我々の問題に戻ろう．ここまでの議論では 3 次元ドメインウォールは二つの 4 次元ゲージ理論の間の射として与えられていたが，我々の問題では同じヒルベルト空間上からそれ自身への写像を問題にしていた．従って，考えるべきは同じ 4 次元ゲージ理論の間のドメインウォールとなる．なおかつドメインウォールは $Sp(2n,\mathbb{Z})$ で指定されなければならないので，4 次元理論にも対応物がなければいけない．第 1.3.2 節で述べたように，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論でゲージ群が可換 $U(1)^n$ の時の双対性の群はまさに $Sp(2n,\mathbb{Z})$ であった．

一般に，**4 次元ゲージ理論の双対性である $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換と 3 次元場の理論への $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換が同一視される**ことが期待される（図 5.2）．従って，今の場合には一つの理論とその**双対性群（duality group）**により変換されたものが両側にあるドメインウォールを考えることになる．これを**双対ドメインウォール（duality domain wall）**と呼ぶ．

3 次元理論が 4 次元理論の境界として現れる時，4 次元のダイナミカルなゲージ場は 3 次元理論の立場からは外場に見えるので，大域対称性の背景ゲージ場に見える：**4 次元ゲージ理論のゲージ対称性は 3 次元場の理論への大域対称性と同一視される**．今 4 次元理論は両側に存在するので，4 次元ゲージ群を G とすると 3 次元理論は $G \times G$ の対称性を持っていなければならない[*8)]．

---

*7) もっとも，二つのドメインウォールが衝突する極限はシンギュラーな極限であってその正則化に関して注意が必要である．本書では超対称ゲージ理論を考え，さらにその局所化された分配関数を議論しており，既に赤外・紫外の発散は正則化されているのでこの点は回避されていると期待される．

*8) より正確には，この主張は実際的にはやや強すぎる．第 1.3.2 節で述べたようにゲージ群 $G=SU(N)$ を持つ 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の S 双対はそれ自身ではなく $G^\vee = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ であるので，4 次元理論の S 双対に対応する双対ドメインウォールを考えると，その 3 次元場の理論の大域対称性は $G \times G^\vee$ となる．

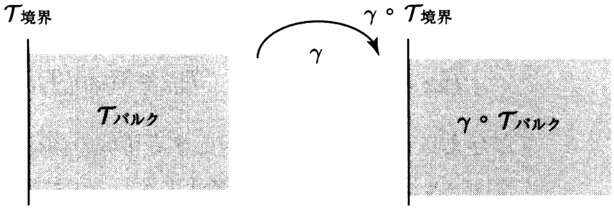


図 5.2　4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論（バルク）の境界に 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が存在したとする．このとき，バルクにおける双対変換 γ の作用は境界では一つの理論（境界条件）を別の理論（境界条件）に送る変換を誘導する．

5.2.3　4 次元と 3 次元の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 作用

ここまでで述べてきた 4 次元と 3 次元の関係は，より直接に確認することもできる．3 次元理論が $U(1)$ 大域対称性を持つ場合を考え，そこに $Sp(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を考えよう．

T 変換の意味を 4 次元ゲージ理論に読み直すのはそれほど難しくない．

$$\frac{k}{4\pi}\int_{x_3=0} d^3x\ A\wedge dA = \frac{k}{4\pi}\int d^3x dx_3\ \theta(x_3) F\wedge F\ , \tag{5.26}$$

但し $\theta(x_3)$ は階段関数

$$\theta(x_3) = \begin{cases} 1 & x_3 > 0 \\ 0 & x_3 < 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

である．これは $x_3<0$ と $x_3>0$ とでは θ 角の値が 2π だけジャンプすることを意味する*9)．この議論を適当に超対称化すると，(境界の存在により 4 次元のローレンツ対称性の一部が破れ，従って超対称性の一部も破れるであろうことを考慮に入れて）3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に対する T 変換は，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 可換ゲージ理論の複素ゲージ結合定数 (1.13) に対する T 変換（$\tau\to\tau+1$）と同一視できることが分かった．

S 変換に対し同様の操作を施すと

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_3=0} d^3x\ B\wedge dA = \frac{1}{2\pi}\int d^3x dx^3\ \theta(x_3) F_B\wedge F_A \tag{5.28}$$

となり，4 次元ゲージ理論では $\int F_B\wedge F_A$ を足すことに対応する．この項の意味を見るために，$U(1)$ ゲージ理論のラグランジアンにこの項を足してみよう*10)：

*9)　テータ角がジャンプする状況は例えばトポロジカル絶縁体の文脈で現れる．このとき $\mathbb{Z}_2$ 時間反転不変性を要請することにするとテータ角は 0 あるいは π に限られており，その値が 0 の領域と π の領域にはレベルが半整数（整数ではなく）のチャーン＝サイモンズ項が現れ，例えばホール伝導度もそれに応じて半整数で量子化される．我々の T 変換ではテータ角の値が 2π 飛ぶのでレベルは整数に量子化される．

*10)　この式は紛らわしいが，添え字の A, B はゲージ場の種類を表し，本体の A, F はゲージ場とその場の強さである．

$$\frac{1}{g^2}F_A\wedge *F_A+F_B\wedge F_A=\frac{1}{g^2}F_A\wedge *F_A+A_B\wedge dF_A+(\text{全微分項})\ . \tag{5.29}$$

但し，簡単のため 4 次元の θ–角は 0 に取った．右辺において，A_B はビアンキ恒等式 $dF_A=0$ を課す為のラグランジュ未定係数の役割を果たしている．よって A_B をダイナミカルな場と看做せば F_A はそれ自身独立な場と看做すことができ，先に積分してしまうことができる．ラグランジアンは F_A について 2 次であるから積分は容易であり，結果として

$$g^2F_B\wedge *F_B \tag{5.30}$$

が残る．これは元のラグランジアンと A,B の入れ替えを除いて同じであるが，但し $g\to g^{-1}$ とゲージ結合定数の値が入れ替わっているという違いがある．これは 4 次元ゲージ理論の意味での S 双対に他ならない．この S 双対も超対称化してやると，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S 変換が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S 変換に対応することが推察される*11)．

こうして 4 次元と 3 次元の $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用が正確に対応することが示された：物理的な意味は 4 次元と 3 次元で異なり，4 次元では（一つの）理論の双対性，3 次元では一つの理論から別の理論への変換である．これは 3 次元場の理論を 4 次元ゲージ理論のドメインウォールとしてみる我々の解釈に対する強いサポートである．なお，歴史的には 3 次元場の理論への $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換はしばしば 4 次元理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性に動機づけられていたのでこの説明は歴史に逆行する側面もあるが，3 次元ゲージ理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換は，本書でこれまでみてきた通り，ゲージ化の概念を追究していくと 4 次元に言及せずとも自然に現れてくるものであることに注意されたい．

5.2.4 S_b^3 分配関数と S_b^4 分配関数

3 次元理論が 4 次元理論のドメインウォールであるという考え方を述べてきたが，これまでは 3 次元理論が平坦な時空 $\mathbb{R}^{2,1}$ の場合を考えてきた．しかし，我々が第 4 章で議論していたのは S_b^3 分配関数であったのだから，そこでの議論と本章での議論を整合的にするためには，対応して 4 次元方向も S_b^3 を含む 4 次元多様体でなければならない．その多様体は S_b^3 の保っていた $U(1)\times U(1)$ 対称性も保っている筈である．また，少なくとも S_b^3 分配関数の局所化に使われた超対称チャージを残さなければならない．

これらの条件を満たす自然な多様体の候補の一つは S_b^4 であり，ここでパラメーター b は変形

---

*11) ここでの議論は第 2.2 節で議論した 3 次元 $U(1)$ ゲージ場を周期的スカラー場へと移す双対変換の 4 次元版であり，途中の式変形は微分形式の足の付き方の違いを除けば全く同じであることに注意しよう．

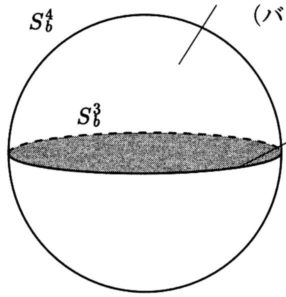


図 5.3 本章ではここまで 3 次元理論が 4 次元理論のドメインウォールとして実現される状況を考えてきた．ここでは，それぞれ 4 次元理論を S_b^4 に，また 3 次元理論を S_b^4 の一部である S_b^3 に配置することで，超対称性を用いた局所化による厳密計算を 4 次元・3 次元の複合系に適用することが可能になる．

$$S_b^4: \quad b^2(x_1^2 + x_2^2) + b^{-2}(x_3^3 + x_4^2) + x_5^2 = r^2 \tag{5.31}$$

を表している．ここで重要なことは，4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論に対してはこの多様体での局所化の計算がなされている[104]ことである（$b = 1$ の時は通常の S^4 の計量になるが，その場合の局所化については [66] を見よ）．我々の以下の議論には (5.31) 及びそこでの局所化の詳細は全く必要としない，

むしろ我々にとって重要なのは，この S_b^4 が S_b^3（式 (4.4)）を大円 $x_5 = 0$ として含んでおり，従って，S_b^4 上の 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論と，その赤道 S_b^3 上に置かれた 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 双対ドメインウォールからなる複合系を考えることが可能だということである（図 5.3）．

より具体的な結果を見ていこう．S^4 の分配関数の局所化の結果は次の形を取る：

$$Z_{4\mathrm{d}}(S_b^4) = \int da\ \nu(a)\, \overline{Z_{a,m}^{\mathrm{Nek}}(q)} Z_{a,m}^{\mathrm{Nek}}(q)\ . \tag{5.32}$$

変数の意味を説明しよう．まず，a は 4 次元のクーロンブランチパラメーターであり，3 次元でのクーロンブランチパラメーター σ の対応物である (4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論のクーロンブランチについては第 6 章でより詳しく触れる)．$q := e^{2\pi i\tau}$ は 4 次元の複素化された結合定数 (の組) であり，また m は理論に存在する (複素) 質量パラメーターである．$\nu(a)$ は局所化の際の古典及び 1 ループからの寄与を表しており，Z^{Nek} はネクラソフによって導入・計算されたインスタントン分配関数 (**ネクラソフ分配関数** (**Nekrasov instanton partition function**))[105] である（より正確にはいわゆる Ω–背景のパラメーター ϵ_1, ϵ_2 を $b^2 = \epsilon_1/\epsilon_2$ と取っている）．本書ではネクラソフ分配関数について詳細は一切必要としない．直観的には S^4 の北（南）半球からの寄与がネクラソフ分配関数 Z^{Nek}（及びその複素共役 $\overline{Z^{\mathrm{Nek}}}$）であると思っておけば十分である．

それでは赤道上に 3 次元ドメインウォールを置いた時には何が起こるだろう

か？ このときの分配関数はこれは先程の分配関数の式 (5.32) に加え，3 次元理論からの寄与を含む[106]：

$$Z_{4d+3d}(S_b^4 \supset S_b^3) = \int dada' \, \nu(a)\nu(a') \, \overline{Z_{a,m}^{\text{Nek}}} \, Z_{3d}(a, a'; m) \, Z_{a',m}^{\text{Nek}} \, . \tag{5.33}$$

但し，$Z_{3d}(a, a'; m)$ はドメインウォール上の理論の S_b^3 分配関数であり，a, a' は 3 次元理論の実質量（FI パラメーターも含む）である．この式が (5.21) と同様の形をしていることに注意しておこう．この類似のより正確な意味は第 6.3.3 節でより明確になるであろう．

5.3 補足：非可換ゲージ群への拡張：$T[SU(N)]$ 理論

5.3.1 $T[SU(N)]$ 理論とは

ここまで我々が議論してきた理論は 3 次元チャーン＝サイモンズ項やその超対称化で記述され，3 次元理論としては比較的単純な理論であった．しかし，バルクの 4 次元理論が非可換ゲージ群 G を持つときは状況が異なる．第 2 章では可換ゲージ群についてしか $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換が定義されていなかったことを思い出されたい—これは非可換ゲージ群について双対変換を実行するのは困難だったからである*12)．

ここまでの議論では，4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論に双対性が存在するのがポイントであった．そのような典型例として，第 1 章で議論した 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論でゲージ群が $SU(N)$ の場合を考えよう．このときの双対性は（$SU(N)$ と $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ の違いを気にしないことにすれば）$SL(2, \mathbb{Z})$ 双対性であった．

$SL(2, \mathbb{Z})$ は S 変換と T 変換 (1.15) で生成されていたので，この二つに対応するドメインウォールが何であるかを考えれば十分である．T 変換の場合には可換ゲージ理論の場合と全く同じ議論を用いることができ（(5.26) 参照），ゲージ群 G に対するチャーン＝サイモンズ項が現れることがすぐに分かる．

それでは S 変換についてはどうだろうか？ この場合は事情はより複雑である．先の双対変換を用いた議論は非可換ゲージ群については適用できないので別の議論が必要になる．

既に第 1 章で述べたように，4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論の S 変換は 6 次元理論，つまり M5 ブレーンの立場からは単純な操作に置き換わる．M 理論から出発して IIB 型超弦理論へと超弦理論の双対性を辿っていくと，そこでは S 変換は IIB 型超弦理論に存在するブレーンの入れ替えとして容易に理解できる．この理解を用いて，非可換ゲージ群の場合の（3 次元理論に対する）S 変換を構成することができる．その結果[107] だけを述べると次の通りになる：図 5.4 で記述さ

*12) 例えば，非可換ゲージ理論の場合にはゲージ場の強さが $F = dA + A \wedge A$ と非線形になるので，(5.29) は正しくなくなる．

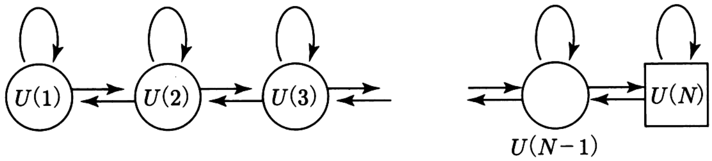


図 5.4　$T[SU(N)]$ 理論の箙．この理論は 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性を持つが，この箙ではそれを $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ理論と看做した時の箙を書いた．つまり，頂点と矢印はそれぞれ $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項（カイラル多重項）を表す．頂点の四角と丸の区別は図 2.1 の場合と同様である．

れる 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論は $SU(N)\times SU(N)/\mathbb{Z}_N$ 大域対称性を持ち，その内の $SU(N)$ 対称性ともとの理論に存在する $SU(N)$ 大域対称性の対角部分をゲージ化する操作が S 変換だというのが主張である．今の場合バルクが 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性を持っていたので，対応してドメインウォール上の理論の超対称性の数はその半分，つまり 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性を持つことになる．

この主張の強力な証拠の一つは後にこの理論の S_b^3 分配関数について述べた時に与えるが，ここではもっとも簡単な $T[SU(2)]$ についてもう少し詳しく見ていこう．この理論は [29] で議論された例であり，3 次元ミラー対称性のもとでそれ自身に戻ることが知られている．この理論は 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性を持つが，ここでは第 3 章で述べた 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称理論の言葉を用いて記述してみよう（付録 A 参照）．

すぐ後に見るように，実際には我々は 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の $\mathcal{N}=2$ 理論への実質量による変形（$\mathcal{N}=2^*$ 理論）を考える．本書では簡単のためこれらを全て $T[SU(N)]$ 理論と呼ぶことにする．

まず，ゲージ群は $U(1)$ であり対応するベクトル超場 V が存在する．さらに，チャージ $+1$ の電子 Q_1, Q_2 とチャージ -1 の反電子 $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2$ が二つずつ存在し，さらに中性なカイラル超場 Φ が存在する．V と Φ は $\mathcal{N}=4$ ベクトル多重項 (V,Φ) をなし，また Q_i と $\overline{Q}_i$ は $\mathcal{N}=4$ ハイパー多重項 $(Q_i,\overline{Q}_i)$ をなすことに注意．

理論に存在する場とそのチャージを表 5.1 にまとめた．但し今回はラグランジアンに直接登場する場のみを示し，モノポール演算子は表に示さなかった．また $U(1)$ 大域対称性のうち，対応する実質量を与えたとき低エネルギーでパリティ・アノマリーを引き起こさないもののみを示した．

この理論にはフレーバーを入れ替える $SU(2)$ 大域対称性と，トポロジカル $U(1)_J$ 大域対称性が存在する．実は，この $U(1)_J$ 対称性は量子論では $SO(3)_J = (SU(2)/\mathbb{Z}_2)_J$ に増大する．この $SO(3)_J$ 対称性はラグランジアンには直接存在しない量子的な対称性であるが，モノポール演算子を使って間接的に確認することができる．こうして二つの大域対称性が存在するので，それぞれの背景ゲー

表 5.1 $T[SU(2)]$ の場とその対称性のチャージ.

	Q_1	Q_2	$\overline{Q}_1$	$\overline{Q}_2$	Φ
$U(1)_{ゲージ}$	1	1	−1	−1	0
$U(1)_A$	1	−1	−1	+1	0
$U(1)_J$	0	0	0	0	0
$U(1)_m$	+1	+1	+1	+1	−2
$U(1)_R$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

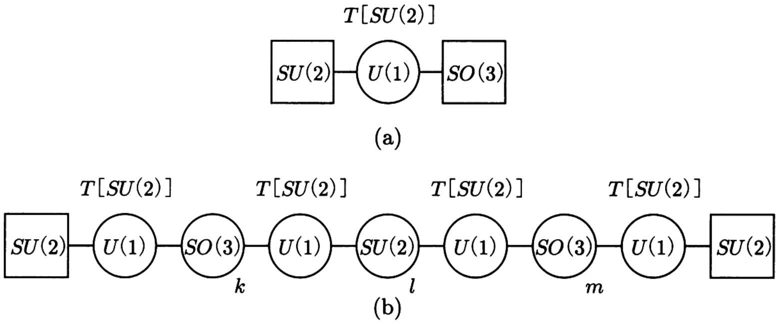


図 5.5 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性に対応する双対性ドメインウォール. 四角は大域対称性, 丸はゲージ対称性を表す. (a) S 変換は $SU(2)\times SO(3)_J$ 大域対称性を持つ $T[SU(2)]$ 理論に対応する. (b) それらを組み合わせて得られる一般の $SL(2,\mathbb{Z})$ の元 (S と T の積 (1.17)) に対応する理論の例. 但し, 丸のそばにある $k,l,\cdots$ は対応するゲージ群にレベル $k,l,\cdots$ のチャーン＝サイモンズ項を入れることを意味する.

ジ場をバルクのゲージ場と同一視することにより二つの 4 次元理論 ($SU(N)$ ゲージ理論とその S 双対, つまり $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ ゲージ理論) と結合することができるのである. 先に述べた主張によると, S 変換は $T[SU(2)]$ の $SU(2)\times SO(3)_J$ 対称性のうち片方をゲージ化する変換である.

S_b^3 分配関数の計算のためには 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性のみを用いるが, $T[SU(2)]$ 理論は $\mathcal{N}=4$ 超対称性を持つ. 表 5.1 の対称性のうち, $U(1)_m$ の対称性は, その実質量を非零に取った時に 3 次元の $\mathcal{N}=4$ R 対称性 $\mathrm{Spin}(4)=SU(2)_N\times SU(2)_R$ をその $\mathcal{N}=2$ R 対称性 ($SO(2)$ 部分群) に破る対称性である. 従って $U(1)_m$ 対称性の実質量 m を入れると超対称性は $\mathcal{N}=2$ に破れる. このパラメーターには 4 次元対応物が知られており, それは 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論を $\mathcal{N}=2^*$ 理論へ変形する質量である (4 次元 $\mathcal{N}=2^*$ 理論については 1 点付きトーラスに関連して次章で言及する). この変形は依然として $SL(2,\mathbb{Z})$ 双対性を持つことが知られている.

より一般の $SL(2,\mathbb{Z})$ の元に対応する理論は, $T[SU(2)]$ にチャーン＝サイモンズ項を与えつつゲージ化する作業を繰り返せばよい (図 5.5). このとき, $T[SU(2)]$ 理論の $SU(2)\times SO(3)_J$ 大域対称性の両方をゲージ化することにな

り，特に（カルタン部分群 $U(1)_J$ を除いて）古典的なラグランジアンに存在しない $SO(3)_J$ 対称性をゲージ化する操作が含まれていることに注意したい．

5.3.2 $T[SU(N)]$ 理論の分配関数

さて，第 5.2.4 節で議論した分配関数に戻ろう．(5.33) は一般的な式であったが，ここで特に 3 次元上の理論が $T[SU(2)]$ 理論の場合を考えることにしよう．第 4 章で議論したルールに従うと（表 5.1 参照），質量変形された $T[SU(2)]$ 理論の S_b^3 分配関数を書き下すことができる：

$$
\begin{aligned}
&Z_{T[SU(2)]}(\mu,\zeta;m)\\
&= s_b(-m)\int d\sigma\,\frac{s_b(\mu+\sigma+\frac{m}{2}+\frac{iQ}{4})s_b(\mu-\sigma+\frac{m}{2}+\frac{iQ}{4})}{s_b(\mu+\sigma-\frac{m}{2}-\frac{iQ}{4})s_b(\mu-\sigma-\frac{m}{2}-\frac{iQ}{4})}\,e^{4\pi i\zeta\sigma}.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

但し，FI パラメーターを ζ，$U(1)_A$（$U(1)_m$）に対応する実質量を μ（m）と書いた．また，式のスペースを省略するため (B.58) を用いて一部の $s_b(x)$ を分母に移動した．この式がある種のフーリエ変換の積分核として看做せることについては文献 [108] 参照のこと．式 (5.34) は複雑であるので，ここではパラメーターを特殊化して簡単化してみよう．超対称性が $\mathcal{N}=4$ に増える条件 $m=0$ 及び S^3 の対称性が $SO(4)$ になる条件 $b=1$ を課すと，(5.34) 式は

$$
\begin{aligned}
&Z_{T[SU(2)]}(\mu,\zeta;0)\\
&=\int d\sigma\,\frac{s_{b=1}(\mu+\sigma+\frac{i}{2})s_{b=1}(\mu-\sigma+\frac{i}{2})}{s_{b=1}(\mu+\sigma-\frac{i}{2})s_{b=1}(\mu-\sigma-\frac{i}{2})}\,e^{4\pi i\zeta\sigma}\\
&=\frac{1}{4}\int d\sigma\,\frac{e^{4\pi i\zeta\sigma}}{\cosh\pi(\mu+\sigma)\cosh\pi(\mu-\sigma)}
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

となる．これは積分路を閉じると評価できて，

$$
\begin{aligned}
Z_{T[SU(2)]}(\mu,\zeta;0) &= \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi i\zeta m}-e^{-2\pi i\zeta m}}{\sinh(2\pi m)\sinh(2\pi\zeta)}\\
&= \frac{i\sinh(2\pi\zeta m)}{\sinh(2\pi m)\sinh(2\pi\zeta)}\ .
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

同様の計算を行うことで，より一般の 3 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論 $T[SU(N)]$ を考えると，$b=1$ の時（全体にかかる位相因子を除いて）

$$
Z(\vec{m},\vec{\zeta}) = \frac{1}{N!}\frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}(-1)^\sigma e^{2\pi i\vec{m}\cdot\vec{\zeta}}}{\Delta(\vec{m})\Delta(\vec{\zeta})}
\tag{5.37}
$$

となる[109]．これはフーリエ変換の積分核を N 個の変数を持つ理論に自然に拡張したものになっている*13)．

---

*13) 文献 [109] では (5.37) の一般化も提唱された．それらの系統的な証明については [110] を参照．

より一般の場合の解析も同様である．例えば，$\varphi = ST^kS$ に対しては分配関数は

$$\int d\sigma\, Z_{T[SU(2);m]}(\mu,\sigma)\, e^{-4\pi i k\sigma^2}\, Z_{T[SU(2);m]}(\sigma,\mu') \tag{5.38}$$

となり，積分核 S, T を

$$\begin{aligned} S_{(\sigma,\sigma';m)} &:= Z_{T[SU(2);m]}(\sigma,\sigma';m)\ , \\ T_{(\sigma,\sigma')} &:= e^{-4\pi i\sigma^2}\delta(\sigma-\sigma') \end{aligned} \tag{5.39}$$

により導入するとこれは

$$\int d\sigma' d\sigma''\, S_{(\sigma,\sigma';m)} T^k_{(\sigma',\sigma'')} S_{(\sigma'',\sigma''';m)} = (ST^kS)_{(\sigma,\sigma''';m)}\ . \tag{5.40}$$

これを一般の $SL(2,\mathbb{Z})$ の元に拡張するのは容易であり，答えはやはり積分核 S, T の組み合わせで得られる．

実は，積分核 (5.39) と全く同一の表式がリウビユ理論やタイヒュミュラー理論で現れる．これは偶然ではなく，既に第 8 章の内容との関係を示唆している．この理由は次章（特に第 6.3.3 節）において明らかになるであろう．

演習問題

5.1 [♦]（S_b^3 分配関数での $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換）S, T 変換の S^3 分配関数への作用 (5.2), (5.1) を用いて直接 $(ST)^3 = 1$ を確認せよ．

5.2 [♦]（正準変換の合成）定義式 (5.7) 及び (5.8) から (5.9) を示せ．

5.3 [♦]（定数ファクターの決定）本文中 (5.7)，(5.8) においては定数ファクターは無視していた（例えば，(5.5) をみよ）．これらの定数ファクターも込めた S_b^3 分配関数の完全な $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換を書き下せ．定数ファクターは一般の $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列に対してどう与えられるか？

5.4 [♦]（量子力学における $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換）ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} \tag{5.41}$$

で記述される自由粒子系を考えよう．但し，運動量を $\hat{P}$，それに共役な位置座標を $\hat{Q}$ と書いた．この自由粒子形のエネルギー固有状態

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \tag{5.42}$$

を調べることにしよう．$\hat{Q}$ の固有状態を $|Q\rangle$ とし，波動関数 $\Psi(Q) = \langle\Psi|Q\rangle$ を具体的に求めることができる．

それでは，ハミルトニアン及び波動関数は P, Q の正準変換（$SL(2,\mathbb{R})$ 変換）のもとでどう変換されるだろうか？（ハミルトニアンを考えるときに $\hat{P}, \hat{Q}$ が交換しないことに注意．）

5.5 [♦]（$T[SU(2)]$ 理論の S_b^3 分配関数）(5.34)，(5.35)，(5.36) を確認せよ（ヒント：積分経路を閉じて留数定理を用いる）．

5.6 [♦♦]（$T[SU(2)]$ 理論の 3 次元ミラー対称性）分配関数 (5.34) が

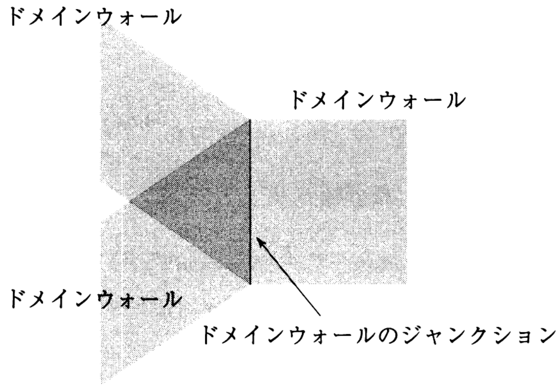


図 5.6 ドメインウォールのジャンクション．ドメインウォールはバルクの理論において余次元 1 であるので，ジャンクションは余次元 2 となる．

$$Z_{T[SU(2)]}(\mu,\zeta;m)=Z_{T[SU(2)]}(\zeta,\mu;-m) \tag{5.43}$$

を満たすことを確かめよ．これは $T[SU(2)]$ 理論が 3 次元ミラー対称性のもとで（m の符号の入れ替えを除いて）それ自身に戻るという事実の表現である．

これが難しい場合は，積分 $Z_{T[SU(2)]}(\mu,\zeta;m)$ を $b\to 0$ の極限で鞍点近似で評価し，その結果が上の対称性を持つことを確かめよ．

5.7 [♦]（ドメインウォールのジャンクション）本文では平行なドメインウォールが近づく極限で積構造が定義された．それでは複数のドメインウォールのジャンクションを考えるとどのような代数構造に対応するべきだろうか（図 5.6 参照）？

第 6 章
6 次元理論のコンパクト化

6 次元 (2,0) 理論の 3 次元多様体上でのコンパクト化について説明し，そこから 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論が現れることを議論する．

6.1 位相的場の理論の出現

6.1.1 6 次元理論登場

前章の設定では，3 次元場の理論はとある 4 次元場の理論のドメインウォールと看做すことができた．またその S_b^3 分配関数を計算することで，3 次元理論 $\mathcal{T}$ の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 同値類 $[\mathcal{T}]$ は（S_b^3 分配関数のレベルでは）4 次元場の理論から定まるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3}$ に作用する演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ と看做されることを見てきた．このヒルベルト空間は，4 次元理論を $S^3\times\mathbb{R}$ で考え，$\mathbb{R}$ 方向を時間と思ったときに S^3 に現れるヒルベルト空間であると解釈できるのであった*1)：

$$4\text{ 次元理論}: S^3\times\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{H}_{S^3}\ . \tag{6.1}$$

前章では具体的に 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論及びその質量変形（4 次元 $\mathcal{N}=2^*$ 理論）を考えた．それではより一般の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考えることはできるだろうか？

前章の議論のためには 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の双対性が重要だったので，鍵となるのは，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論をその双対性が露わになる形で構成することである．

手がかりは既に第 1 章にある：そこでは 6 次元 (2,0) 理論を 2 次元多様体 $\Sigma_{g,h}$ でコンパクト化することで 4 次元理論が得られたのである（場の理論の幾何学化）．このことと (6.1) を合わせると，考えるのは

$$6\text{ 次元 }(2,0)\text{ 理論}: S^3\times\mathbb{R}\times\Sigma\ . \tag{6.2}$$

---

*1) ここで述べた「4 次元理論のヒルベルト空間」は，通常の意味での 4 次元理論の場の理論よりはずっと小さいヒルベルト空間である．我々は超対称性の一部を保つ S_b^4 分配関数を議論していたのであり，S_b^4 分配関数に寄与しない状態については考慮に入れていない．

$\Sigma = \Sigma_{1,0} = \mathbb{T}^2$ の時は 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論が得られ，$\mathbb{T}^2$ の写像類群が $PSL(2, \mathbb{Z})$ 双対群と同一視できた．これにパンクチャーを入れて $\Sigma_{1,1}$ とすると，4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論の自然な変形で，$\mathcal{N} = 2$ 超対称性を保つものが対応するべきである．4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論を $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を持つ理論と看做すと，$\mathcal{N} = 4$ ベクトル多重項は $\mathcal{N} = 2$ ベクトル多重項と（随伴表現に値を持つ）$\mathcal{N} = 2$ カイラル多重項に分解するので，その $\mathcal{N} = 2$ カイラル多重項に質量を与えることができる（この理論を 4 次元 $\mathcal{N} = 2^*$ 理論と呼ぶことが多い）．この質量の値を，パンクチャーの穴の周りのホロノミー（穴の「大きさ」）と同一視できる．トーラス T^2 にパンクチャーを入れて $\Sigma_{1,1}$ にしてもその写像類群は $PSL(2, \mathbb{Z})$ のままであり，これは 4 次元 $\mathcal{N} = 2^*$ 理論の S 双対性（質量変形しても S 双対性は保たれる）と自然に同一視される．

より一般のリーマン面 $\Sigma_{g,h}$ を考えると，やはり何らかの 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論が得られる．第 1 章ではこの理論を $\mathcal{T}[\Sigma]$ と書いたのであった．そのとき 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の双対性の群は，リーマン面の写像類群で与えられることが期待される．この期待が正しいことは文献 [32] により提唱され，その後様々なチェックがなされてきたが，本書ではその詳細はほとんど必要としない．

6.1.2 位相的場の理論への翻訳

本章の残りではこのコンパクト化についてより詳細に説明していくが，まずは 6 次元理論の存在とコンパクト化の選び方 (6.2) だけから言えることが何かないか考えてみよう．

コンパクト化の議論で頻出するのは，場の理論のコンパクト化の順序を取り替えることである*2)．上ではまず Σ にコンパクト化したが，先に S^3 についてコンパクト化すると $\mathbb{R} \times \Sigma$ 上に 3 次元理論が現れる．この理論において $\mathbb{R}$ を時間と思い正準量子化を行うと Σ 上にヒルベルト空間が現れることになる（図 6.1）．これが前章で我々の出会った設定であった．

さて，前章の内容をこの 3 次元理論の言葉に翻訳してみよう．前章では 3 次元理論が 4 次元理論のドメインウォールであることを説明したのであった．

翻訳のためには 6 次元のうち残り次元が幾つあるかを数えればよい．4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論は 2 次元リーマン面に対応したので，その間のドメインウォールである 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論は二つの 2 次元リーマン面をつなぐ 3 次元多様体でなければならない．つまり，二つのリーマン面を Σ_1, Σ_2，また Σ_1 の向きを逆にしたものを $-\Sigma_1$ と書くと，3 次元多様体は $\partial M = (-\Sigma_1) \cup \Sigma_2$ を満たす．そのような多様体 M を Σ_1, Σ_2 のなす**コボルディズム（同境写像，cobordism）**と呼ぶ（図 6.2）．

前章のドメインウォールの公理 (5.23)，(5.25) をこの言葉で書き直してみよ

*2) 小さい多様体から順にコンパクト化されると考えてよい．コンパクト化の順序を代えることはコンパクト化する多様体の相対的な大きさを変えることになるので，このとき問題にしている物理量が保たれるかどうかは一般には注意が必要である．

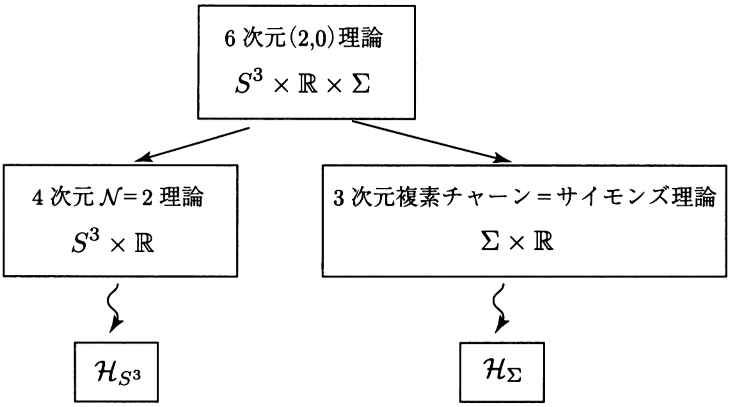


図 6.1 6 次元理論の $S^3 \times \mathbb{R} \times \Sigma$ 上で考えるとき，コンパクト化の順序を取り替えることができる．先に Σ についてコンパクト化すると $S^3 \times \mathbb{R}$ 上の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論とそのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3}$ が現れるが，先に S^3 についてコンパクト化すると $\mathbb{R} \times \Sigma$ 上の 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論とそのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\Sigma}$ が現れる．

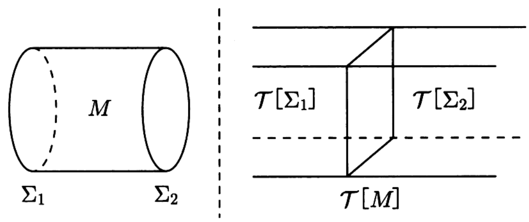


図 6.2 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の間に存在する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ドメインウォールは，6 次元の残りの方向では 2 次元多様体をつなぐコボルディズムに翻訳される．

う．Σ_1, Σ_2 のコボルディズム M に対しては，

$$\hat{M} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\Sigma_1}, \mathcal{H}_{\Sigma_2}) \tag{6.3}$$

なる写像がある．さらに $\partial M_1 = (-\Sigma_1) \cup \Sigma_2, \partial M_2 = (-\Sigma_2) \cup \Sigma_3$ と二つのコボルディズムがあったとすると，M_1 と M_2 を Σ_2 で張り合わせることで別のコボルディズムができる：$\partial(M_1 \cup_{\Sigma_2} M_2) = (-\Sigma_1) \cup \Sigma_3$．このとき対応する写像について（図 6.3, (5.20) も参照）：

$$\widehat{M_1 \cup M_2} = \hat{M}_1 \cdot \hat{M}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\Sigma_1}, \mathcal{H}_{\Sigma_3})\ . \tag{6.4}$$

また，Σ_2 が空集合 $\emptyset$ の場合，対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\emptyset}$ は $\mathbb{C}$ で与えられ，コボルディズム $\partial M = -\Sigma_1$ に対応する写像は

$$\hat{M} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\Sigma_1}, \mathbb{C}) \tag{6.5}$$

となるべきである（図 6.4）．

最後に，Σ_1, Σ_2 のコボルディズム M が存在した時にその向きを逆にしたコ

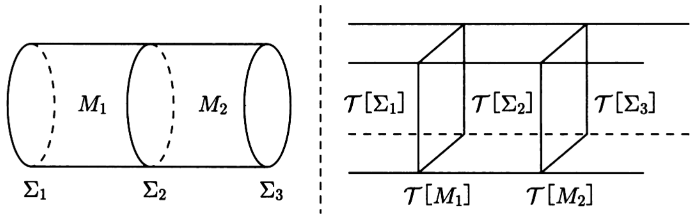


図 6.3 二つの 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ドメインウォールの積は，6 次元の残りの方向では二つのコボルディズムの積（結合）に翻訳される．

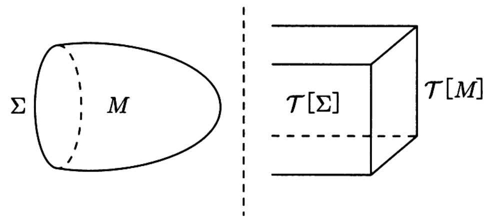


図 6.4 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の境界であることは，6 次元の残りの方向では 3 次元多様体が 2 次元多様体を境界に持つことに翻訳される．

ボルディズム $-M=\Sigma_2\cup(-\Sigma_1)$ を考えると

$$\widehat{(-M)}\in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{\Sigma_2},\mathcal{H}_{\Sigma_1}) \tag{6.6}$$

であり，$\mathcal{H}_{-\Sigma}$ は $\mathcal{H}_\Sigma$ の双対 $\mathcal{H}_\Sigma^*$ である（以下では物理の記法に従い，状態 $|-\rangle\in\mathcal{H}(\Sigma)$ の双対を $\langle-|\in\mathcal{H}(\Sigma)^*$ で表すことにする）．

(6.3)，(6.4)，(6.5) 及び (6.6) は**位相的場の理論**（**トポロジカルな場の理論，topological field theory**）についての**アティヤ＝シーガルの公理**（**Atiyah-Segal axiom**）[111],[112] として知られているものに他ならない．ここで，位相的場の理論とは，理論の性質がその理論が定義された多様体の計量に依存しない特殊な場の理論のことである．

ここまでの考察から，3 次元多様体上に現れる理論はある種の位相的場の理論であると期待するのが自然である．実際，すぐ後にみるように，この理論は位相的場の理論のなかで最も典型的なものの一つ，3 次元チャーン＝サイモンズ理論になるのである．

位相的場の理論の公理ではコボルディズム $M=(-\Sigma_1)\cup\Sigma_2$ は写像 $\hat{M}$ に対応するが，物理で問題になるのはどちらかというと期待値のほうである．それには $\mathcal{H}_{\Sigma_1}$ 及び $\mathcal{H}_{\Sigma_2}$ の元，つまり境界条件を指定すればよい．それらを $|\rho\rangle$ 及び $|\sigma\rangle$ と書くと，

$$Z_{\mathrm{CS}}[M]=\langle\sigma|\hat{M}|\rho\rangle \tag{6.7}$$

となり (5.21) と同じ形である．但し，今は位相的な場の理論を考えているので

ハミルトニアンは自明であり，従って時間発展を考える必要がないことに注意しよう．

特に，$M = \Sigma \times I$（I 線分 $[0,1]$）で I の両端を同一視して S^1 にした時はどうだろうか？ このときは二つの状態 $|\rho\rangle$ 及び $|\sigma\rangle$ が同一視され，その状態について和を取ることになる．但し，単純な直積の代わりに，Σ の写像類群の元 φ で捻った**写像トーラス（mapping torus）**

$$(\Sigma \times S^1)_\varphi = (\Sigma \times [0,1])/(x,0) \simeq (\varphi(x),1) \tag{6.8}$$

を考えることにすると，φ の取り方に応じて 3 次元多様体（のトポロジー）を変えることができる．このとき，φ は位相的場の理論のヒルベルト空間に対する演算子 $\hat{\varphi}$ に格上げされ，そのトレースが $(\Sigma \times S^1)_\varphi$ の分配関数を与える*3)：

$$Z_{\rm CS}[(\Sigma \times S^1)_\varphi] = \int_{|\rho\rangle:\text{状態}} \langle\rho|\hat{\varphi}|\rho\rangle \ . \tag{6.9}$$

写像トーラスについては再度第 9.4.2 節でコメントする．

6.2 コンパクト化とトポロジカル・ツイスト

6.2.1 6 次元 (2, 0) 理論

ここまでの議論から 3 次元多様体上に位相的場の理論が現れることが示唆されたが，正確にどの理論が現れるかまでは分からなかった．より詳細に議論するために，まず 6 次元理論の性質について手短にまとめておこう．

6 次元 (2, 0) 理論（6d (2, 0) theory）というのは 6 次元の共形場理論である．第 2.4 節の脚注 7 でも議論したように，5 次元以上の時空ではゲージ理論は繰り込み可能ではなく，繰り込み群の向きは通常と逆になるので固定点の存在を有効場の理論の範疇で議論するのは容易ではない．6 次元 $(2,0)$ 理論の存在はもともと超弦理論から示唆されたが，場の理論からの直接的な存在証明はなされておらず，少なくとも通常の意味での（ローレンツ対称性と非可換ゲージ不変性の両方を明白に保った）ラグランジアンは本書執筆時点で知られていないし，存在する保証もない．

理論に存在する場は 6 次元の $(2,0)$ 超対称性から制限が付いており，その $(2,0)$ 多重項は自己双対完全反対称 2–形式 $B_{\mu\nu}$（$dB = *dB$ を満たす），二つのワイルフェルミオン λ_1, λ_2 及び 5 つのスカラー $\phi_1, \cdots, \phi_5$ からなる．なお，6 次元では右向きと左向きの超対称性の数が異なってもよいので，それを $\mathcal{N} = (2,0), (1,1), (1,0)$ などのように表す*4)．但し，(L,R) と書いたとき L と R はそれぞれ左向きと右向きの超対称性の数である．

念のために，ボソンとフェルミオンとの自由度の数が同じであることを確認してお

*3) 但し，この量は例えば $\hat{\varphi} = \mathrm{id}$ の時発散する．

*4) $\mathcal{N} = (0,2)$ ではなく $\mathcal{N} = (2,0)$ であるというのは文献での標準的な規約である．

こう．本書ではどのような補助場が超対称多重項に現れるかどうかに立ち入らないので自由度は on-shell で数えるべきである．

まず，2–形式 $B_{\mu\nu}$ の自由度を数える際には，時間方向は空間方向と相殺するので残りの空間 4 次元方向を考えればよい（これは，4 次元ゲージ場の on-shell での自由度を数える時に $4-2=2$ とするのと同様である）．$B_{\mu\nu}$ 完全反対称の足を持ち，かつ $dB = *dB$ の制限により自由度は半分になるので $\frac{4(4-1)}{2} \times \frac{1}{2} = 3$. これと 5 個のスカラー場を合わせてボソンの自由度は 8. 一方フェルミオンは 16 個存在するが on-shell では半分になって $16/2 = 8$. 従って自由度は一致した．

5 個のスカラー場 $\phi_1, \ldots, \phi_5$ は対等の立場にあり，$SO(5)_R \simeq Sp(4)_R$ R 対称性のもとで **5** 表現として変換する．

さて我々の為に重要なのは次の事実である：6 次元の (2,0) 理論には ADE 型の分類が知られており，本書では A_N 型と呼ばれるものを考える．**6 次元 A_N 型 (2,0) 理論を半径 R の S^1 にコンパクト化すると 5 次元 $\mathcal{N}=2, SU(N+1)$ ピュア・ヤン＝ミルズ理論が現れる**[*5)]**：**

$$\begin{aligned}&\textbf{6 次元 } A_N \textbf{ 型 } (2,0) \textbf{ 理論} : \mathbb{R}^5 \times S^1 \\ &\longrightarrow \textbf{5 次元 } \mathcal{N}=2\ SU(N+1) \textbf{ ピュア・ヤン＝ミルズ理論} : \mathbb{R}^5\ .\end{aligned} \tag{6.10}$$

さらに，そのとき 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のゲージ結合定数は

$$g_5^2 = 2\pi R \tag{6.11}$$

で与えられる[*6)]．g_5^2 と R は比例するので，弱結合では R の半径は小さく，時空は勿論 5 次元だが，強結合では R の半径は大きくなり，時空の次元が上がって 6 次元になるのである．別の言い方をすると，5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論から出発しその繰り込み群のフローを逆に辿った時に，強結合極限 $g \to \infty$ において紫外固定点が存在しそれが 6 次元 (2,0) 理論であるというのが主張である（第 2.4 節での脚注 7 も参考のこと）．以前の式 (2.20) から，g_5^2 は質量次元 -1 を持ち，これは半径 R の次元と一致することに注意しておこう．

6 次元 (2,0) 理論はもともと IIA 型超弦理論を ADE 型の特異点の上で考えることによって得られた[113]ので，対応して ADE 分類を持つ．このとき 5 次元理論のゲージ群も ADE 型のゲージ群となる（より具体的には $A_N = SU(N+1), D_N = SO(2N), E_6, E_7, E_8$）．$A_N$ 型で N が大きいときには AdS/CFT 対応の意味で対応する M 理論の重力解が知られており，6 次元理論の存在の間接的な証拠を与える．また，通常の次元還元ではコンパクト化された方向のカルツァ＝クラインモード（Kaluza-Klein mode）を捨ててしまうが，今の場合 6 次元理論の S^1 方向のカルツァ＝クライ

*5)　物質場を持たないヤン＝ミルズ理論のことを**ピュア・ヤン＝ミルズ理論（pure Yang-Mills theory）**と呼ぶ

*6)　(6.11) は通常のゲージ理論の次元還元の式とは R 依存性が逆数の関係にあることに注意している．このことの意味については演習 6.1 を参照．

ンモードは，5 次元理論のインスタントンとして理解でき，6 次元の自由度は既に 5 次元に含まれているようにみえる．

5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論と 6 次元 (2,0) 理論は，それぞれ 10 次元 IIA 型超弦理論と 11 次元 M 理論における D4 ブレーンと M5 ブレーンと呼ばれるブレーンの上に現れる理論である．従って，この 5 次元から 6 次元への持ち上げは，10 次元 IIA 型超弦理論から 11 次元 M 理論への持ち上げでもあるのだ．

(6.10) を納得するために，6 次元 (2,0) 理論を S^1 コンパクト化した時に，2-形式 $B_{\mu\nu}$ に何が起こるか調べてみよう．S^1 コンパクト化の際に，その方向（5 方向とする）は時空の足ではなくなるので，$B_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,\ldots,5)$ からは

$$A_{\hat{\mu}}=B_{\hat{\mu}5}\ ,\quad B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\ ,\quad \hat{\mu},\hat{\nu}=0,1,\cdots,4 \tag{6.12}$$

が得られる．しかし，6 次元での自己双対条件 $dB=*_6 dB$ が存在したので，実は独立な自由度として $A_{\hat{\mu}=0,\cdots,4}$ だけを考えればよく，これは 5 次元理論でのゲージ場と看做すことができる．

5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論は 6 次元 $\mathcal{N}=(0,2)$ 理論と同一の R 対称性 $SO(5)_R\simeq Sp(4)_R$ R 対称性を持つ[*7]ことにも注意しておこう．

5 次元理論を S^1 コンパクト化すれば，既に第 1 章で述べた主張，つまり 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論が 6 次元 (2,0) 理論の T^2 コンパクト化から従うという主張に戻ることになる（演習問題 6.1 参照）．

6.2.2 トポロジカル・ツイスト

次に 6 次元理論を 3 次元多様体や 2 次元多様体においてコンパクト化しよう．

既に我々は第 4 章において曲がった空間 S^3 の上で超対称性を考えた．その際は S^3 に適切なスピノルが存在したのでそれを用いて超対称変換を書き下すことができた．しかし，この方法には難点が一つある．より一般の多様体を考えると，そのような性質の良いスピノルは存在しないのである．この場合には別の方法が知られている．それが**トポロジカル・ツイスト**（**topological twist**）である[*8]（以下単にツイストと呼ぶこともある）．

トポロジカル・ツイストについて詳細に論じることはここではしない（例えば [93] を参考にせよ）が，一つの説明の仕方は時空のローレンツ対称性の一部を超対称代数の R 対称性の一部と同一視すること，より実際的にはそのような同一視を引き起こすフラックスを入れることである．超対称チャージはローレンツ対称性と同時に R 対称性でも変換するから，その二つの対称性が同一視されたときに，（反交換統計に依然として従うが）スカラーとして振る舞う成分 Q

*7) このことはのちにトポロジカル・ツイストの議論で重要になる．

*8) もっとも，第 4 章における超対称性の場合も R 対称性のフラックスを入れるという点においてある種のトポロジカル・ツイストであるので両者の間にそれほど大きな違いがあるわけではない．

が現れることが期待できる．もしそうであれば，そのスカラー Q はどのような多様体の上でも問題なく定義できるので超対称代数が定義できることになる．

ツイストされた理論ではエネルギー・運動量テンソルが Q–完全になるので理論は計量によらない**トポロジカル**（**位相的，topological**）な理論になる．上の手続きがトポロジカル・ツイストと呼ばれるのはそのためである．なお，ツイストされた理論に対比させて，元の計量に依存する理論のことを**物理的な**（**physical**）理論と呼ぶこともある．

今我々が考えたい状況では，6 次元理論を多様体の上にコンパクト化し，その方向についてのみトポロジカル・ツイストを行う一方，残りの方向についてはツイストを行わず物理的な理論を保っておく．この状況をしばしば**部分トポロジカル・ツイスト**（**partial topological twist**）と呼ぶ．

この議論には一つ問題点がある．既に述べたように，6 次元理論は未だに謎の多い理論であり，特に（ローレンツ対称性とゲージ不変性を明白に保つ）ラグランジアンも知られていないので実際にツイストを実行することはできない．

しかし，6 次元理論の S^1 コンパクト化によって得られる 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論は既に知られている（(6.10) を参照）ので，6 次元理論が S^1 を含んでいる状況であれば先にその方向にコンパクト化してからトポロジカル・ツイストを考えることができる．つまり

$$6\text{ 次元 }(2,0)\text{ 理論} : \mathbb{R}^4 \times \Sigma \longrightarrow 4\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論} : \mathbb{R}^4 \tag{6.13}$$

において $\mathbb{R}^4$ のうち一方向を S^1 にコンパクト化することを考える：

$$\begin{aligned}&6\text{ 次元 }(2,0)\ A_N\text{ 型理論} : \mathbb{R}^3 \times S^1 \times \Sigma \\ &\longrightarrow 5\text{ 次元 }\mathcal{N}=2,\ SU(N)\text{ ピュア・ヤン＝ミルズ理論} : \mathbb{R}^3 \times \Sigma\,.\end{aligned} \tag{6.14}$$

このとき 5 次元理論の Σ 上でのツイストは実行できる．さらにコンパクト化の順序を変えて S^1 より先に Σ にコンパクト化することすると，4 次元理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ が 3 次元理論に S^1 コンパクト化されることになる：

$$4\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論} : \mathbb{R}^3 \times S^1 \longrightarrow 3\text{ 次元 }\mathcal{N}=4\text{ 理論} : \mathbb{R}^3\,. \tag{6.15}$$

但し超対称性の数が 4 次元と 3 次元で変わらないことから 3 次元では $\mathcal{N}=4$ 超対称性になる（付録 A 参照）．

ここまでの議論は抽象的だったのでより具体的にしてみよう．まず 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論をリーマン面 Σ の上で考えよう．このとき Σ のローレンツ対称性はその接空間の局所的なフレームを回転する回転群 $SO(2)$ である．これを $SO(5)$ R 対称性の部分群と同一視するが，このとき，R 対称性の残りは $SO(3)\times SO(2) \simeq SU(2)\times U(1)$ である．4 次元で超対称性の数が $\mathcal{N}$ の時その R 対称性は $U(N)$

である（付録 A）ので，このことは 4 次元理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ が $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つことを示唆する．なお，4 次元理論は (6.15) にあるように $\mathbb{R}^3 \times S^1$ にコンパクト化されている．

同様の議論は 3 次元多様体 M の時にも実行できる．このとき，対応する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論では特定の空間 S^3_b を考えており，第 4 章の議論（(4.41) 式）において，S^3_b の $b \to 0$ 極限において S^1_b が自然に現れたことを思い出しておこう．従って，この S^1 の方向を 6 次元方向と看做すことにすると，

$$
\begin{aligned}
&6 \text{ 次元 } (2,0) \text{ 理論} : S^3_b \times M_3 \xrightarrow{b \to 0} \\
&\qquad\qquad 5 \text{ 次元 } \mathcal{N}=2 \text{ ピュア・ヤン＝ミルズ理論} : \mathbb{R}^2 \times M_3
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

を得る*9)．但し，このとき 5 次元の半径は b で与えられる．つまり，**3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論での S^3 の変形パラメーター b は量子ダイログ関数の変形のパラメーター b と同一視されたが，これらは 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン＝ミルズ理論のゲージ結合定数と**

$$
2\pi R = 2\pi b = g^2_{5d} \tag{6.17}
$$

の関係にある．量子ダイログ関数の「量子」とは 5 次元理論が 6 次元理論に持ち上がること，つまり超弦理論の言葉では D4 ブレーンの M5 ブレーンへの持ち上げ，IIA 型弦理論の M 理論への持ち上げを意味していたのだ．

5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を 3 次元多様体上でツイストするとき，3 次元多様体の接空間の回転の自由度は $SO(3)$ であり，この場合残りの対称性は $SO(2)$ である．3 次元で超対称性の数が $\mathcal{N}$ の時その R 対称性は $SO(\mathcal{N})$ である（付録 A）ので，これは 3 次元理論 $\mathcal{T}[M]$ が $\mathcal{N}=2$ 対称性を持つことを意味する．

(6.15) の対応物として，3 次元理論 $\mathcal{T}[M]$ は S^1 コンパクト化されていることに注意しよう：

$$
3 \text{ 次元 } \mathcal{N}=2 \text{ 理論} : S^3_b \overset{b \to 0}{\sim} \mathbb{R}^2 \times S^1_b \longrightarrow 2 \text{ 次元 } \mathcal{N}=(2,2) \text{ 理論} : \mathbb{R}^2 \,. \tag{6.18}
$$

なお，こうして定義された理論 $\mathcal{T}[\Sigma], \mathcal{T}[M]$ は Σ や M の幾何的な構造，例えば計量に依存する可能性がある．しかし，これまで強調してきたように我々は低エネルギーでの理論の振る舞いのみに興味があり，Σ や M の大きさの情報には興味がないので計量 $g_{\mu\nu}$ とその共形変換したもの $e^{\phi} g_{\mu\nu}$ は区別しない．つまり，計量の共形類のみに依存性を持つ．このことから，例えば 2 次元面 Σ の場合には Σ の複素構造（形の変形のモジュライ）だけを考えればよいことが分かる（第 8.1.2 節参照）*10)．この複素

---

*9) この極限については．第 7 章で再度立ち返ることなる．

*10) これは非自明な主張であって，一般に例えば 6 次元 (1,0) 理論のコンパクト化を考えると必ずしも正しくない．今のように 3 次元多様体にコンパクト化する場合には，6 次元理論がスケール不変性を持つこと（従って 3 次元多様体と残りの 3 次元を同時にスケー

構造の変形の自由度は，理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ を $\mathcal{N}=2$ 超対称性及び共形対称性を保って変形する自由度と同定される．例えば，$\Sigma=T^2$ の時はその複素構造は (1.19) 周辺で議論したトーラスのモジュラス τ であり，それは複素化されたゲージ結合定数 (1.13) と同一視されたのであった．

6.3 3次元多様体上の理論の同定

さて，ここまでツイストの議論から3次元理論の超対称チャージの数を決定したが，まだもともとの問題が残っていた：3次元多様体上に現れる理論は何であるのか？ 既に我々はそれが位相的場の理論である示唆を得たが，より正確に何であるのかを理解したいのである．

そのためにはトポロジカル・ツイストについてもう若干踏み込んだ議論が必要になる．以下ではトポロジカル・ツイスト及び直接の局所化の立場からこの答えを与えよう．まず第6.3.1節で3次元多様体の場合，第6.3.2節で2次元多様体の場合を述べ，さらに第6.3.3節においてAGT対応との関連についてまとめる．

なお，3次元複素チャーン＝サイモンズ理論が現れることについては，本章で説明した以外にも位相的弦理論による解釈[114] もある他，第9章でも3次元多様体の理想四面体分割や量子ダイログ関数の性質を用いた説明を与える．これらの説明する内容は全く同じというわけではなく，相補うものである．

6.3.1 ツイストとBPS条件：3次元

5次元 $\mathcal{N}=2$ 理論では5個のスカラー場 $\phi_1,\ldots,\phi_5$ が存在し，それは $SO(5)$ R対称性の元で **5** 表現で変換するのであった．先に述べたツイストの作用の元で，$SO(5)$ 対称性は $SO(3)\times SO(2)$ と分解し，$SO(3)$ は3次元多様体 M 方向の接束の $SO(3)$ と混ぜられたことを思い出そう．これに対応して，スカラー場も M の1–形式 $\phi_\mu=\phi_1,\phi_2,\phi_3$ と，M 上のスカラー場 ϕ_4,ϕ_5 とに分解する．

3次元多様体 M 上のコンパクト化では三つのスカラー場 ϕ_μ は M 方向のゲージ場 A_μ と複素に組み合わさり $\mathcal{A}=A+i\phi$ となる．この場に対する配位が超対称性を保つ条件，つまりツイストされた5次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のBPS方程式を調べると，得られる方程式は

$$\mathcal{F}=d\mathcal{A}+\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}=0 \tag{6.19}$$

である．これは複素化されたゲージ群 $G_{\mathbb{C}}$ の**平坦接続**（**flat connection**）の方程式である．この方程式の解空間をゲージ変換で割って得られるモジュライ空間が，**平坦接続のモジュライ空間**（**moduli space of flat connections**）

ル変換しても不変)，また残りの3次元方向で例えば S^3 分配関数を考えるとそれはエネルギースケールによらないことを合わせるとよい．

である．

残りの 3 個のスカラー場 $\phi_{4,5}$ についての BPS 方程式は，それらが複素ゲージ場 $\mathcal{A}$ と交換することを要請する．$G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続が既約 (irreducible) である時にはそのときは $\mathcal{A}$ と交換する元は自明な元しか存在しないのでこの $\phi_{4,5}$ については忘れても構わない．本書で主として議論するのは幾何的解釈を持つ $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続であり，それらは既約である．

3 次元方向に現れる理論は，その運動方程式が (6.19) を与えることが期待される．そのような理論は複素接続 $\mathcal{A}$ に対応するチャーン＝サイモンズ理論に他ならない：

$$\mathcal{L}_{\text{複素 CS}} \sim \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}\wedge d\mathcal{A}+\frac{2}{3}\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\right)\,. \tag{6.20}$$

こうして，我々は **3 次元多様体 M 上の理論が複素ゲージ群 $G_{\mathbb{C}}$ を持つチャーン＝サイモンズ理論である**との結論を得た．この理論については次章でより詳しく議論する．まとめると，**3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を $\mathbb{R}^2\times S^1$ で考えると，その真空は 3 次元多様体 M 上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続に対応する．**

ここまでの議論ではツイストと BPS 条件から 3 次元多様体 M の理論を同定してきたが，M 上に 3 次元チャーン＝サイモンズ理論が現れることをより直接に証明することもできる：5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を $S^2\times M$ の上に置き，局所化を直接実行して 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論が M 上に現れることを示せばよい．この計算は文献 [115], [116] で実行された（[117], [118] も参照）：

$$Z_{5\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論}}[S^2\times M]=Z_{\text{複素チャーン＝サイモンズ}}[M]\,. \tag{6.21}$$

この式の詳細，例えばパラメーターの対応については第 7 章でより細かく説明する．この結果は 3 次元多様体 M 上の理論が複素チャーン＝サイモンズ理論であることの文句のない証明であるといえる．興味深いことに，上記の結果は一般のゲージ群 G に適用できる．また，3 次元理論は全ての平坦接続を径路積分に含まなければならないので，考えるべきは例えば 3 次元重力ではなく実際に 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論であることが明確になる（この点に関しては第 7.3 節参照）．さらに，(6.21) の導出の過程で，ゲージ固定の効果によってゲージ群が実際 G から $G_{\mathbb{C}}$ になることが確認できる．詳細については文献 [115], [116] を参照されたい*11)．

6.3.2 ツイストと BPS 条件：2 次元

ここまでと同様の議論は 2 次元の場合に繰り返すことができる．出発点は前

*11) 二つの文献の違いとして，[116] では 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の off-shell 形式を構成してからそれを $S^3\times M_3$ に応用する．一方，[115] では 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を on-shell 形式で $S^2\times M_3$ に置いてからそれを off-shell に持ち上げ，それを $(S^1\times S^2)\times M_3$ に応用する．局所化による計算のためには最終的には off-shell の超対称変換が必要である．

回と同じ5次元のBPS方程式であるから，類似の方程式を期待するのが自然である．先程は $SO(5)_R$ 対称性を M の接束に作用する $SO(3)$ と混ぜたので $SO(2)$ 部分群が残ったが，今度は Σ の接束に作用する $SO(2)$ と混ぜればよく，そのときは $SO(3) \times SO(2)$ 部分群が残る（これは大体先の議論で $SO(3)$ と $SO(2)$ を入れ替えたことに対応する）．スカラー場のうち二つが2次元面上 Σ の1–形式に変換され，それが Σ 方向のゲージ場を複素化し，BPS方程式は複素接続 $\mathcal{A}_{\mu=1,2} = A_\mu + i\phi_\mu$ を定義すると再度 $G_\mathbb{C}$ 平坦接続の式になる：

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0 \,. \tag{6.22}$$

2次元多様体と3次元多様体のどちらにも $G_\mathbb{C}$ 平坦接続が現れることは自然である．というのも，2次元多様体上の理論は3次元多様体上の理論の境界2次元部分への制限になっているべきだから．

式(6.22)は，実部と虚部に展開すると，

$$F - \phi \wedge \phi = 0 \,, \quad D_A \phi = 0 \tag{6.23}$$

となる．この方程式系は**ヒッチン方程式（Hitchin equation）**[119] と呼ばれる．つまり，ヒッチン方程式の解空間（**ヒッチン・モジュライ（Hitchin moduli）**）は，$G_\mathbb{C}$ 平坦接続の空間を与えるのである*12)．

もう少し正確に説明すると次の通りになる．ヒッチン方程式の解空間のモジュライ空間は**ハイパーケーラー多様体（hyperKähler manifold）**と呼ばれる多様体になっており，それは複素構造の三つ組 I, J, K を持つ．ヒッチン・モジュライが $G_\mathbb{C}$ 平坦接続の空間を与えるのは，複素構造として特別なものを選んだ時である*13)．

3次元多様体 M の時と同様に，4次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論を $\mathbb{R}^3 \times S^1$ で考えると((6.15)参照)，ヒッチン・モジュライが現れることが期待される．実際これはその通りで，**4次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ を $\mathbb{R}^3 \times S^1$ で考えると，そのクーロンブランチモジュライは Σ のヒッチン・モジュライで与えられる**というのが主張である．この事実は第8章においてその幾何的な考察を物理的に理解するのに便利である．

ここで，4次元 $\mathcal{N} = 2$ のクーロンブランチについて説明を加えておこう（付録Aも参照）．4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性のゲージ場 A_μ を含む超多重項は**ベクトル多重項（vector multiplet）**と呼ばれ，ゲージ群のもとで随伴表現で変換する複素スカラー場 ϕ を含んでいる．

*12) 残りの3個のスカラー場 $\phi_{3,4,5}$ についてのBPS方程式は，それらが複素ゲージ場 $\mathcal{A}$ と交換することを要請する．これらスカラー場は本書で議論する4次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論のクーロンブランチの理解のためには重要ではないが，より一般に真空のモジュライのブランチ構造を調べるために不可欠である[120]．

*13) $G_\mathbb{C}$ 平坦接続の空間にはシンプレクティック形式(8.9)が存在する．このシンプレクティック形式は，通常の既約では複素構造 J のもとで正則である．

4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の言葉では，$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項は $\mathcal{N}=1$ カイラル多重項 (ϕ,ψ) と $\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項 (A_μ,λ) に分かれる．ゲージ場 A_μ はゲージ群の随伴表現で変換するので，そのスーパーパートナーであるスカラー場 ϕ も期待通り随伴表現で変換する．

4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の真空においては，複素スカラー場 ϕ が期待値を持つ状況が考えられる．ϕ はゲージ群の随伴表現に値を持つので，それが期待値を持つときゲージ群はその可換部分（カルタン部分代数）$U(1)^{r_G}$ に破れている．ここで，r_G はゲージ群 G のランク（階数，rank）である．随伴表現はゲージ群の可換部分群に対して自明に変換することに注意．

こうして定まる真空のモジュライ空間のことを 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の**クーロンブランチ（クーロン枝，Coulomb branch）***14) と呼ぶ．

この ϕ は，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のベクトル多重項におけるクーロンブランチ・スカラー σ（第 3 章）と類似している：どちらの場合もゲージ場と同じ超対称性の多重項に随伴表現に値を持つスカラー場が存在し，そのスカラー場が期待値を持つのである．但し，第 3 章のケースと比べると，今超対称性の数は倍である．

なお，ここでのクーロンブランチは通常の意味，つまり $\mathbb{R}^4$ で考えたクーロンブランチではなく，$\mathbb{R}^3\times S^1$ で考えたクーロンブランチである．S^1 コンパクト化するとき，ゲージ場の S^1 方向の成分はスカラー場になり，その双対フォトンによる複素化（第 3.4.1 節参照）はクーロンブランチの新たな座標となり，S^1 コンパクト化した後のクーロンブランチの次元はコンパクト化する前のクーロンブランチの次元の倍になる．さらに，このことからヒッチン・モジュライが底空間の上にトーラスファイバーを持つことが示唆され，それはヒッチン・モジュライの性質として実際正しい．

6.3.3 補足：AGT 対応との関係

本章を終わる前に **AGT 対応（AGT correspondence）**[121] との関係についてコメントすることにしておこう．3 次元・3 次元対応とは AGT 対応の自然な一般化であることを説明するのが目的である．AGT 対応を仮定することにすれば，これは 3 次元・3 次元対応の別導出を与えているとも看做せる．

まず，AGT 対応を説明しよう（本節では全てを説明しきることはスペースの関係でできないので全体的な構造を把握することに力点を置かれたい）．AGT 対応は 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S^4 分配関数とリウビユ理論の対応を主張する：

$$\begin{aligned}&4\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論 }\mathcal{T}[\Sigma]\text{ の }S^4\text{ 分配関数}\\&\qquad\longleftrightarrow 2\text{ 次元 }\Sigma\text{ 上のリウビユ理論}\ .\end{aligned}\tag{6.24}$$

リウビユ理論はそれ自身巨大なトピックであり，本書では本節を除いて殆ど言及はされないので詳細は必要としない．ここで必要となるのは以下のことである：まず，ラグランジアンが

*14) 枝と呼ばれるのは特定の点（例えば共形不変性を持つ点）から複数の「枝」が伸びてくるからなのではないかと想像する．

$$S=\int d^2z\left(\partial\phi\bar{\partial}\phi+\pi\mu e^{2b\phi}\right) \tag{6.25}$$

で与えられる共形場理論である[*15]．もう一つ我々の目的の為に重要なのは，相関関数の共形ブロック分解である．一般に，共形場理論においてはその演算子の相関関数がリーマン面の複素構造について正則な部分と反正則な部分に分解することが知られている．特に，今演算子 $V_\alpha := e^{\alpha\phi}$ の相関関数を考えることにすると，次の形の分解を得る：

$$\left\langle\prod_i V_{E_i}\right\rangle_\Sigma=\int d\alpha\,\nu(\alpha)\,\overline{\mathcal{F}_{\alpha,E}(q)}\mathcal{F}_{\alpha,E}(q)\ . \tag{6.26}$$

但し $\mathcal{F}^\sigma_{\alpha,E}$ は**共形ブロック**（**conformal block**）と呼ばれ，α と E はそれぞれ変数の組[*16]であり，α については積分するが E は固定する．また q ($\bar{q}$) は Σ の複素構造のパラメーターとその複素共役である．$\nu(\alpha)$ はとある積分測度であるが，詳細はここでは特に必要ではない．

これは (5.32) での S^4 分配関数と全く同じ分解の形をしている．AGT 対応は二つの分解が同一であることを主張する．つまり，

$$Z_{4\mathrm{d}}[S^4]=\left\langle\prod_i V_{E_i}\right\rangle_\Sigma \tag{6.27}$$

であり，

$$\begin{aligned}&4\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論 }\mathcal{T}[\Sigma]\text{ のネクラソフ分配関数 }Z^{\mathrm{Nek}}_{a,m}(q)\\&\qquad\longleftrightarrow 2\text{ 次元 }\Sigma\text{ 上のリウビユ理論の共形ブロック }\mathcal{F}_{\alpha,E}(q)\end{aligned} \tag{6.28}$$

となる．パラメーターの同定は[*17]

$$\alpha=a,\quad E=m\ . \tag{6.29}$$

さらに，S^4 分配関数の積分測度 $\nu(a)$ は (5.32) でのものと一致する．

ここまでの議論は S^4_b についてであったが，それではさらに前章（図 5.3）のように S^3_b にドメインウォールを考えたら対応する 2 次元理論には何が起こるだろうか？ さらに，そうして現れるドメインウォール上の 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論（の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換での同値類）はそれ自身演算子と看做せたのだから，リウビユ理論にも対応する演算子が存在するだろうか？

このことを理解するためには，ドメインウォールは 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の双対性群の元に付随していたことを思い出そう．4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の双対性群は 2 次元リーマン面の写像類群と同一視されたことを思い出せば，考えるべきは

---

*15） ちなみに，パラメーター b はそのセントラルチャージを $c_L:=1+6(b+b^{-1})^2$ で与える．

*16） α は内線，E は外線運動量である．

*17） 標準的な記法では $\alpha=\frac{b+b^{-1}}{2}+a$ であるが，本書では座標 α は露わには用いないのでここでは α と a が対応することだけ了解しておけばよい．

写像類群の元 $\varphi \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$ であることが分かる．さらに，φ の演算子版 $\hat{\varphi}$ が作用するべきものはネクラソフ分配関数の対応物，すなわち共形ブロックであることが分かる．つまり，まず，

$$\hat{\mathcal{T}} \longleftrightarrow \hat{\varphi} \tag{6.30}$$

であり，それぞれは波動関数 (6.28)

$$Z^{\mathrm{Nek}}_{a,m}(q) = \langle a,m|Z^{\mathrm{Nek}}(q)\rangle \longleftrightarrow \mathcal{F}_{\alpha,E}(q) = \langle \alpha,E|\mathcal{F}(q)\rangle \tag{6.31}$$

に作用する．ここで，$|a,m\rangle = |\alpha,E\rangle$ 及び $|Z^{\mathrm{Nek}}(q)\rangle = |\mathcal{F}(q)\rangle$ は異なる 2 種類の状態であり，例えば波動関数 $Z^{\mathrm{Nek}}_{a,m}(q)$ は状態 $|Z^{\mathrm{Nek}}(q)\rangle$ を状態 $|a,m\rangle$ で展開した時に得られるものとした（これについては第 8.3 節も参照）．最後に，(5.33) についての対応関係から

$$Z_{3d}(a,a';m) := \langle a,m|\hat{\mathcal{T}}|a',m\rangle \longleftrightarrow \varphi_{\alpha,\alpha';E} := \langle \alpha,E|\hat{\varphi}|\alpha',E\rangle\,. \tag{6.32}$$

ここでパラメーターの同定は以前と同様に $a=\alpha,\quad a'=\alpha'$ である．また，m は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の立場では $\mathcal{N}=4$ 超対称性からの実質量変形のパラメーターである．

演算子 $\hat{\varphi}$ は共形ブロックの φ のもとでの変化を表している．自然な

$$\hat{\varphi}|\mathcal{F}(q)\rangle = |\mathcal{F}(q')\rangle \tag{6.33}$$

を仮定すると（これは φ が q を q' に写すという主張であり，直観的な意味は明らかである），適宜完全系を挿入することで

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,E}(q') &= \langle \alpha,E|\mathcal{F}(q')\rangle = \langle \alpha,E|\hat{\varphi}|\mathcal{F}(q)\rangle \\ &= \int d\alpha'\,\nu(\alpha')\,\langle \alpha,E|\hat{\varphi}|\alpha',E\rangle\langle \alpha,E'|\mathcal{F}(q)\rangle \\ &= \int d\alpha\,\nu(\alpha')\,\varphi_{\alpha,\alpha';E}\mathcal{F}_{\alpha'}(q)\end{aligned} \tag{6.34}$$

となる．共形場理論をご存知の読者は，これは通常の共形場理論の指標のモジュラー変換と類似のものと思っておけばよい．

こうして定義された $\varphi_{\alpha,\alpha';E}$ はリウビユ理論及び第 8 章で扱う量子タイヒュミュラー理論において計算できる．特に，$\Sigma=\Sigma^{1,1}$ で φ が S 変換の場合には*18)，こうして計算された $\varphi_{\alpha,\alpha';E}$ の式が前章で計算した $T[SU(2)]$ の分配関数 (5.34) を再現することが確かめられる[34], [123]*19)．

それでは $|\alpha\rangle, |q\rangle$ のような状態は物理的にどのようなヒルベルト空間の元なのだろうか？ 第 8 章，特に第 8.3 節において説明するように，リウビユ理論は

*18) 4 点球面 $\Sigma_{0,4}$ の共形ブロックの積分核に対応する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の提案については [122] を参照．

*19) パラメーターは $\mu,\zeta \leftrightarrow \alpha,\alpha'$ と同定する．

表 6.1 超対称ゲージ理論とリウビユ理論/量子タイヒュミュラー理論との辞書.
第 8.3 節も参照.

超対称ゲージ理論	リウビユ理論（量子タイヒュミュラー理論）
双対性のなす群	写像類群
実質量・FI パラメーター a, a'	内線運動量（長さパラメーター） α, α'
超対称性を破る質量 m	外線運動量（パンクチャーの変数） E
ネクラソフ分配関数 $Z^{\rm Nek}_{a,m}(q) = \langle a, m \| Z^{\rm Nek}(q) \rangle$	共形ブロック（基底変換） $\mathcal{F}_{\alpha,E}(q) = \langle \alpha, E \| \mathcal{F}(q) \rangle$
3 次元分配関数 $Z_{\rm 3d}(a, a'; m) = \langle a, m \| \hat{\mathcal{T}} \| a', m \rangle$	演算子 φ の期待値 $\varphi_{\alpha,\alpha';E} = \langle \alpha, E \| \hat{\varphi} \| \alpha', E \rangle$
S^3 でのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3}$	Σ でのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\Sigma$

$SL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続の空間（のとある連結成分）であるタイヒュミュラー空間を記述している．その複素化は $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続のモジュライであるヒッチン系（の実スライス）と関係しており，それは自然に 3 次元多様体の $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続の空間を 2 次元に制限したものである．従って，3 次元多様体の $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続のなす空間の量子化を考え，それを正準量子化することで欲しいヒルベルト空間が得られると期待される．既に第 6.3.1 節で述べたように，このことから我々は 3 次元 $SL(2,\mathbb{C})$ チャーン＝サイモンズ理論へと導かれる*20)．

こうして我々は複素チャーン＝サイモンズ理論に辿り着いた．図 6.1 のヒルベルト空間とは Σ のヒルベルト空間だったのである（[127] 参照）．このことを形式的にまとめると，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3} \simeq \mathcal{H}_\Sigma$ の元として

$$|Z^{\rm Nek}(q)\rangle = |\mathcal{F}(q)\rangle \tag{6.35}$$

でありこれから直ちに

$$\langle \overline{Z_{\rm Nek}(q)} | \hat{\varphi} | Z_{\rm Nek}(q) \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}(q)} | \hat{\varphi} | \mathcal{F}(q) \rangle \ . \tag{6.36}$$

標語的に述べると **3 次元・3 次元対応は，AGT 対応を双対性群＝写像類群について同変（equivariant）にしたものである**，あるいは **3 次元・3 次元対応は，AGT 対応の圏化である．**

ここまでの対応関係を表 6.1 にまとめた．但し，この表のうち量子タイヒュミュラー理論の部分は第 8.3 節で説明されることになる．

*20) $SL(2,\mathbb{R})$ チャーン＝サイモンズ理論を境界付き多様体の上で考えると，適切な境界条件を設定すると境界上にリウビユ理論が現れることが示せる[124]．コンパクト群を持つチャーン＝サイモンズ理論の時には，境界上に WZNW (Wess-Zumino-Novikov-Witten) 模型が現れることは良く知られている[125],[126]が，それを非コンパクト群の場合に拡張したのが上の主張であると考えればよい．

演習問題

6.1 [♦]（4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の S 双対性）6 次元 (2,0) 理論を半径 R の円周でコンパクト化すると 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が得られた．次に，その 5 次元理論を半径 R' の円周でコンパクト化しよう．このとき得られる 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論のゲージ結合定数を R と R' で表せ（(6.11) を参照）．特に，二つの半径の取り替えが 4 次元の S 双対 $g \to g^{-1}$ に対応することを示せ．

6.2 [♦]（6 次元の自己双対 2–形式のラグランジアン）本文で述べたように，6 次元 A_N 型 $(2,0)$ 理論に対し，通常の意味での（例えば，6 次元のローレンツ対称性を明白にした）ラグランジアンを書き下すのは困難であると考えられている．6 次元 $(2,0)$ テンソル多重項には $dB = *dB$ を満たす自己双対 2–形式 $B_{\mu\nu}$ が存在した．そこで，この 2–形式のラグランジアン（運動項）を書き下してみよう：

$$\mathcal{L}_{\text{自己双対 2−形式}} = \frac{1}{g^2}\partial_\mu B_{\nu\rho}\partial^\mu B^{\nu\rho} \tag{6.37}$$

としたとき，このラグランジアンに何か問題はあるだろうか？

6.3 [♦]（トポロジカル・ツイストの詳細）本章ではトポロジカル・ツイストの議論でスカラー場のみを考えた．それでは，フェルミオンは，ツイストによりどのような場に変換されるだろうか？ 2 次元多様体，3 次元多様体それぞれにコンパクト化する場合について考えよ．特に，その結果時空のローレンツ群に対してスカラーで変換するフェルミオニックな場（BRST チャージとして使える場）が存在することを示せ．

6.4 [♦]（BPS 方程式）BPS 方程式 (6.23)（あるいは (6.22)）が 4 次元の自己双対ヤン＝ミルズ方程式

$$F_{12} + F_{34} = F_{23} + F_{41} = F_{13} - F_{24} = 0 \tag{6.38}$$

の次元還元であることを示せ．同様に，(6.19) は高次元のゲージ場の方程式（自己双対ヤン＝ミルズ方程式の高次元版）の次元還元と看做せるだろうか？

第 7 章
3次元多様体の世界

ここでは 3 次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間とその量子化を議論する．幾何的な $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続は 3 次元多様体の幾何，特に双曲幾何で記述され，その量子化を与えるのが複素チャーン＝サイモンズ理論である．

7.1 複素チャーン＝サイモンズ理論

前章で **6 次元理論を 3 次元コンパクト化したときに M 上に複素チャーン＝サイモンズ理論が現れること，また残りの 3 次元方向に $\mathcal{N}=2$ 理論が現れること**を見てきた．こうして，我々は **3 次元・3 次元対応 (3d/3d correspondence)***1) に辿り着いた．以下我々は，この対応に順次肉付けをしていく．なかでも，一つ鍵となるのは次の主張である[34],[35],[128]~[130]（前章 (6.21) も参照）：

$$Z_{3\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論 }\mathcal{T}[M]}[S^3_b \text{ または } S^1\times S^2]=Z_{3\text{ 次元 }G_{\mathbb{C}}\text{CS 理論}}[M]. \quad (7.1)$$

この式の非自明さを強調しておこう：右辺では考えている理論はただ一つ（チャーン＝サイモンズ理論）であるが，左辺では右辺の多様体 M の取り方を変えるごとに理論 $\mathcal{T}[M]$ が変わる．また，右辺の理論のゲージ群は非コンパクト群 $G_{\mathbb{C}}$ であるが，左辺のゲージ群はコンパクト群であり，ほとんどの場合 G ではない．さらに，左辺は超対称な場の理論であるが右辺はボソンの自由度のみを持つ．

本章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の詳細に依らずに一般的に議論できる範囲で (7.1) を議論することにしよう．そのために我々はそもそも右辺を正確に理解する必要がある．複素チャーン＝サイモンズ理論とは何であり，その分配関数はどうやって定義されるのか？ 興味深いことに，この一見自明な問いには幾つか微妙な点が存在するのである．

---

*1) この名前は文献 [128] で付けられた．なお，この対応では両側が 3 次元であるうえ，一般には両側でチャーン＝サイモンズ項を持つ理論が現れるので紛らわしいが，「3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論」「3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論」などとして区別することにする．

7.1.1 非可換チャーン＝サイモンズ項

チャーン＝サイモンズ理論（**Chern-Simons theory**）については第3章でも既に触れたが，ここでは改めてその性質をもう少し詳しく見ておくことにしよう．

ゲージ群 G に値を持つ接続 A を考え．3次元多様体 M 上のチャーン＝サイモンズ理論を考える．ここで M はひとまず境界を持たない閉多様体，さらに G は単純群（例えば $SU(N)$）であると仮定しよう．このときラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{CS}}[A] &= \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \\
&= \frac{k}{8\pi}\int_M \epsilon^{ijk}\mathrm{Tr}\left(A_i\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right) + \frac{2}{3}A_i[A_j, A_k]\right)
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

で与えられる．ここで，全体の前の係数 k はレベル（**level**）と呼ばれる係数である．この理論の分配関数は，M の計量がユークリッド計量だとして径路積分

$$
Z_{\mathrm{CS}} = \int \mathcal{D}A\ \ e^{iL_{\mathrm{CS}}[A]} \tag{7.3}
$$

で定義される．

なお，ここで Tr 及びリー代数の生成元の規格化は (1.4) のように選んだ．この規格化はコンベンションではあるが，以下に述べるようにパラメーター k の規格化と連動しているので重要である．

このラグランジアンにはゲージ場そのものが現れているので注意が必要である．特に，多様体上の非自明なバンドルに値を取るゲージ場（主束の接続）を考える*2)際にはその自明化（trivialization）の取り方に依存してラグランジアンの形が変わる可能性がある．

この曖昧さをなくすためには，3次元多様体 M を境界として持つような4次元多様体 V を選び（$\partial V = M$），(7.2) をストークスの定理によって

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{CS}} &= \frac{k}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \\
&= 2\pi k\int_V \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{8\pi^2}F\wedge F\right)
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

と書き直そう．この表示では場の強さ $F\,(= dA + A\wedge A)$ のみが現れるので自明化の取り方に依らないのは明白である．

但し，今度は4次元多様体 V の取り方に任意性が生じる．別の4次元多様体 V' を取ったときとの違いは，境界を持たない4次元多様体 $X = V\cup(-V')$（第6.1.2節の言葉では V と V' のコボルディズム）を用いて

$$
\delta L = -2\pi k\int_X \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{8\pi^2}F\wedge F\right) \in 2\pi k\mathbb{Z}\ . \tag{7.5}
$$

---

*2) ゲージ群が連結かつ単連結の場合（例えば $SU(N)$）には自明なバンドルしか存在しないが，ここでは理解のため，これらの条件が必ずしも満たされない一般のゲージ群 G で考えよう．例えば $U(1)$ は単連結ではない．

ここで，最後には**第 1 ポントリャーギン類**（**first Pontryagin class**）

$$p_1(F) := -\frac{1}{8\pi^2} F \wedge F \tag{7.6}$$

の境界なし 4 次元多様体上（$\partial(V - V') = \emptyset$）での積分が整数であることを用いた*3)．従って，作用 e^{iL} はレベル k が整数であれば V の取り方に依らず，レベル k が量子化されなければいけないことが導かれた（$k \in \mathbb{Z}$）．なお，演習問題 7.1 ではこの量子化条件を別の方法で導くことにする．

ラグランジアン (7.2) は多様体の計量を必要としないので多様体の計量に依存しない．このような場の理論は**位相的場の理論**（**トポロジカルな場の理論，topological field theory**）と呼ばれる．

トポロジカルな理論はある意味特殊な理論であり，例えば通常と異なり相関関数が距離に依存しない．その発見当時[131]はその物理的重要性に関して少なからぬ懐疑論もあったようである．しかしその後ウィッテン（Witten）による論文 [125] に代表される数多くの研究により，結び目理論やトポロジー，表現論等の豊かな数学との関係が見いだされてきた．また物性物理学においてもチャーン＝サイモンズ理論は量子ホール効果やより一般にトポロジカル秩序の記述でも中心的な役割を果たすようになってきており，現在ではその有用性は確立されているといえる．

レベル k はラグランジアンの前の係数であるので，量子系と看做したときの展開パラメーターは $\hbar \sim \frac{1}{k}$ となる．古典極限 $\hbar \to 0, k \to \infty$ では径路積分への寄与は運動方程式の古典解の周りに集中することになり，その条件は**平坦接続**（**flat connection**）の条件

$$F = dA + A \wedge A = 0 \tag{7.7}$$

である．この意味でチャーン＝サイモンズ理論は平坦接続の空間の全体を物理的に量子化する手続きを与えていると看做すこともできる（数学的にも，チャーン＝サイモンズ理論は平坦ベクトル束の研究から生まれた）．既に我々は第 6 章において 6 次元 (2, 0) 理論のコンパクト化から平坦接続の空間が現れることを見たのであった．

7.1.2 複素チャーン＝サイモンズ項

第 6 章の平坦接続は複素化されたゲージ群 $G_{\mathbb{C}}$ の平坦接続であったから，チャーン＝サイモンズ理論の方でもゲージ群を $G_{\mathbb{C}}$ にする必要があった．このときに何が起こるか調べてみよう[132]．

通常のヤン＝ミルズ理論ではゲージ群を複素化することはできない．という

*3) 正確な量子化条件はゲージ群によって異なる．また例えばゲージ群が $SO(n)$ の時には 4 次元多様体 V, V' がスピン構造を持つことを要請するかしないかによっても 2 倍だけ異なる．

のも非コンパクト群 $G_{\mathbb{C}}$ には正定値 2 次形式が存在せず,

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \epsilon_a \delta_{ab} \tag{7.8}$$

と書いたときに ϵ_a の全てを正にできず，負になるものが存在してしまう（これは通常のキリング形式 (1.4) において生成子 T^a を虚数 i 倍することを考えればすぐに分かる）．このとき，ゲージ場の運動項は

$$\int \mathrm{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_a \int \epsilon_a F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} \tag{7.9}$$

となり，エネルギーが下からバウンドされなくなってしまい理論は不安定になる．通常のヤン＝ミルズ場において複素ゲージ群を考えないのはこれが理由である*4)．

幸いなことに，この問題はチャーン＝サイモンズ理論には存在しない．というのも，チャーン＝サイモンズ理論はトポロジカルな理論であり，そのハミルトニアンは常にゼロだからである．

複素チャーン＝サイモンズ理論はこのゲージ場 A を複素化することによって得られる．但し，ゲージ群 G の複素化 $G_{\mathbb{C}}$ とは，具体的には $G = SU(N)$ の時に $G_{\mathbb{C}} = SL(N, \mathbb{C})$ である．$G_{\mathbb{C}}$ ゲージ群の接続を $\mathcal{A}$，またその複素共役を $\overline{\mathcal{A}}$ と書くと，複素チャーン＝サイモンズ理論のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L_{\text{複素 CS}}[\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}] =& \frac{t}{8\pi} L_{\mathrm{CS}}[\mathcal{A}] + \frac{\bar{t}}{8\pi} L_{\mathrm{CS}}[\overline{\mathcal{A}}] \\ =& \frac{t}{8\pi} \int_M \mathrm{Tr} \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right) \\ &+ \frac{\bar{t}}{8\pi} \int_M \mathrm{Tr} \left(\overline{\mathcal{A}} \wedge d\overline{\mathcal{A}} + \frac{2}{3} \overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{A}} \right) \end{aligned} \tag{7.10}$$

で与えられる．ここで t は**複素化されたレベル (complexified level)** であり，

$$t := k + i\sigma \ , \quad \bar{t} := k - i\sigma \ . \tag{7.11}$$

と書かれる*5)．また，式 (7.10) での係数を $\frac{t}{8\pi}$ としたのは，後にみる量子化条件が $k \in \mathbb{Z}$ となるための都合である．理論の分配関数は径路積分

$$Z_{\text{複素 CS}} := \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\overline{\mathcal{A}} \ e^{iL_{\text{複素 CS}}[\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}]} \tag{7.12}$$

で定義される．

以下ではもっぱら $G = SU(2), G_{\mathbb{C}} = SL(2, \mathbb{C})$ の場合を考える（$G = SU(N), G_{\mathbb{C}} = SL(N, \mathbb{C})$ の場合には第 9.4.3 節で短くコメントする）．

---

*4)　フェルミオンを考えるとディラックの海（Dirac sea）を考えることができるのでこの問題はないが，今度はユニタリティーに問題が生じる．

*5)　のちに脚注 (14) で述べるように，σ は実か純虚である．特に σ が純虚の時は t と $\bar{t}$ は複素共役の関係にはないことに注意．文献によってはここでの $i\sigma$ を σ と書くこともあるので注意．

読者の中には $SL(2,\mathbb{C})$ という非コンパクト群に馴染みのない方が多いかもしれないが，$SL(2,\mathbb{C}) \sim SO(3,1)$ であり，4 次元のローレンツ群 $SO(3,1)$ と符号数を除いて一致することに気づくと親しみが湧くであろう．但しユニタリー表現を考える際には符号数の違いは決定的である．例えばコンパクト群 $SO(4)$ は有限次元ユニタリー表現を持つが，$SO(3,1)$ には有限次元ユニタリー表現は存在しない．

7.1.3 積分サイクル

ここまで複素チャーン＝サイモンズ理論について説明してきたが，まだ話は終わりではない：分配関数の定義 (7.12) には曖昧さが存在するのだ．

通常の径路積分の問題では，

$$Z_{\text{径路積分}} = \int \mathcal{D}\Phi \ e^{itL[\Phi]} \tag{7.13}$$

を考える．但し，結合定数 t は実のパラメーターである．このとき被積分関数は位相因子であり（i のファクターに注意）Φ が変化するにつれ激しく振動するが，その量子力学的取り扱いについては量子力学の教科書が教えてくれる通りである．

しかし，結合定数や場 Φ を複素化しだすと状況は異なる．被積分関数は位相因子とは限らず，その絶対値も変化しうる．特に，場の値が無限遠方に近づいたときに，被積分関数の値も大きくなっていき，積分が実行できなくなってしまうことが考えられる．

このような状況では，積分径路を複素平面上で変形し，無限遠方で被積分関数が収束する領域から出発して別の収束する領域へと至る積分径路，**積分サイクル**（**integration cycle**）Γ を選べばよい：

$$Z_{\text{複素 CS}} = \int_{\Gamma} \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}\overline{\mathcal{A}} \ e^{iL_{\mathrm{CS}}[\mathcal{A},\overline{\mathcal{A}}]} \ . \tag{7.14}$$

そのようなサイクルのうち，一次独立なものは複数個存在するが，それらは無限次元でのモース理論によって構成することができる[133]*6)．ここではその詳細は必要としないが，独立な積分サイクルが古典解でラベルづけされることは以下で用いる（このことはここでは直接説明しないが，古典解の周りでの WKB 近似を高次補正まで取り入れて厳密な解にしたものが独立な積分サイクルでの積分を与えるという程度の直観的な把握で十分である）．

今の場合，ラグランジアン (7.10) は正則（holomorphic，つまり t に依存する）部分と反正則（anti-holomorphic，つまり $\bar{t}$ に依存する）な部分の和で書けていた．従って，古典平坦接続は正則部分と反正則部分を別々に指定すればよい．より数学的にいえば，これは $(G_{\mathbb{C}})_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}$ であることから従う．

*6) より具体的には，古典解から出発し，ラグランジアンの実部をモース関数とするフローに沿って積分サイクルを構成すればよい（これは超対称力学とモース理論の関係[134]の無限次元版である）．そのような積分サイクルは**レフシッツ・シンブル**（**Lefschetz thimble**）と呼ばれ，その積分サイクルでの積分は明確な半古典解釈を持つ．

従って，古典解を $\alpha, \bar{\alpha}$ とラベルし，対応する積分サイクルを $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{\bar{\alpha}}$ と書こう．このとき，任意の積分サイクル $\mathcal{C}$ は，$\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{\bar{\alpha}}$ で展開できる：

$$\mathcal{C} = \sum_{\alpha,\bar{\alpha}} n_{\alpha,\bar{\alpha}} \left(\mathcal{C}_\alpha \times \mathcal{C}_{\bar{\alpha}}\right) \ . \tag{7.15}$$

但し，$n_{\alpha,\bar{\alpha}}$ は整数であり，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}_\alpha \times \mathcal{C}_{\bar{\alpha}}$ の（符号付き）交点数で与えられる．よって，分配関数は

$$Z_\alpha(t) = \int_{\mathcal{C}_\alpha} \mathcal{D}\mathcal{A} \ \ e^{i\frac{t}{8\pi}\int_{M_3} \mathcal{L}_{\rm CS}[\mathcal{A}]} \tag{7.16}$$

及び

$$Z_{\bar{\alpha}}(\bar{t}) = \int_{\mathcal{C}_\alpha} \mathcal{D}\overline{\mathcal{A}} \ \ e^{i\frac{\bar{t}}{8\pi}\int_{M_3} \mathcal{L}_{\rm CS}[\overline{\mathcal{A}}]} \tag{7.17}$$

を定義したとき，

$$Z_{\text{複素 CS}}(t,\bar{t}) = \sum_{\alpha,\bar{\alpha}} n_{\alpha,\bar{\alpha}} Z_\alpha(t) \bar{Z}_{\bar{\alpha}}(\bar{t}) \tag{7.18}$$

と書かれることになる．

我々は式 (7.18) を抽象的な方法で導いたが，その直観的な意味を掴むのは難しくない．まず，ラグランジアン (7.10) は正則部分と反正則な部分の和で書けていた．従って，古典解の周りでの展開も正則部分での周りの展開 $Z_\alpha(t)$ 及び反正則部分での周りの展開 $\bar{Z}_{\bar{\alpha}}(\bar{t})$ との積に分解することが直ちに従う．但し，これはあくまで古典解の周りの摂動論

$$Z(t) \sim e^{\frac{1}{t}S_{-1}+S_0+t^1 S_1+\cdots} \tag{7.19}$$

であって，古典解やそれをつなぐ非摂動効果を考えると，正則部分と反正則部分への単純な分解は最早成り立たない．その非摂動効果を現すのが整数 $n_{\alpha,\bar{\alpha}}$ である．

我々が $G_{\mathbb{C}}$ チャーン＝サイモンズ理論の分配関数と呼ぶのは (7.18) のことである．一方，$Z_\alpha(t)$ のことは**解析接続された（analytically continued）チャーン＝サイモンズ理論の分配関数**と呼ぶのが正確である．文献ではしばしば後者のことも複素チャーン＝サイモンズ理論の分配関数と呼ばれるので，二者のどちらかであるかには注意が必要である．本書では煩雑さを避けるために全般に複素チャーン＝サイモンズ理論と呼ぶが，どちらを意味するかは明確に区別しておきたい：例えば第 6.3.1 節で 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の局所化から現れるのは（正則部分と反正則部分を合わせた）複素チャーン＝サイモンズ理論，また本章第 7.3.1 節で古典解を議論するときには解析接続された（正則部分のみの）チャーン＝サイモンズ理論を考えることになる．

7.2 6 次元理論再訪

さて，ここまでの議論によって (7.1) の右辺を正確に定義した．これは単なる厳密性のためではなく，その過程で分解 (7.18) を得たことが重要である．(7.1) は等式であるので，これは同時に (7.1) の左辺，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S_b^3 分配関数も同様の分解を持つことを意味する．ここではこのことが 6 次元理論のコンパクト化から理解できることをみておこう．これによって前章で曖昧にしていた点が明確になる．

前章の議論では $b \to 0$ としたが，ここでは b は有限に保っておこう．第 4 章にならって（特に図 4.3）我々は S^3 を二つのソリッドトーラスに分解し，$S^1 \times D^2 \times M$ を考えよう．D^2 は端を持つ 1 次元の半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上に S^1 がファイバーしたものと看做せる．従って $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times M$ が得られ，先に $T^2 = S^1 \times S^1$ についてコンパクト化すると $\mathbb{R}_{\geq 0} \times M$ 上の 4 次元の $\mathcal{N}=4$ 理論が得られる．勿論，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ の端点ではトーラス T^2 のうち一つのサイクルはつぶれるので，それに対応して 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論に適切な境界条件が課されているものとしなければならない：

$$
\begin{aligned}
&6 \text{ 次元 } (2,0) \text{ 理論}:\ S^1 \times D_2 \times M \ (+\text{境界条件}) \\
&\qquad \longrightarrow 4 \text{ 次元 } \mathcal{N}=4 \text{ 理論}:\ \mathbb{R}_{\geq 0} \times M \ (+\text{境界条件})\,.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論は曲がった多様体 M 上に置かれているのでその方向にトポロジカル・ツイストされている．そのツイストの仕方は $SO(6) \supset SO(2) \times SO(4) \simeq SO(2) \times SO(3) \times SO(3)$ の自然な部分群 $SO(3)$ を M 方向の $SO(3)_M$ と同一視するものである*7)．これは最初に [135], [136] に議論されたトポロジカル・ツイストであり，幾何ラングランズ対応に関連して現れる[137]トポロジカル・ツイストの仕方である．

$SO(4) \simeq SO(3) \times SO(3)$ から $SO(3)$ を選ぶとき，元の二つの $SO(3)$ を混ぜても構わない：このツイストには $\mathbb{CP}^1$ の点で指定されるツイストの仕方があり，これはモジュライ空間の言葉ではハイパーケーラー多様体の複素構造の取り方に他ならない．こうして構成された理論は $\mathbb{CP}^1$ の点 $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と 4 次元の複素ゲージ結合定数 τ (1.13) を組み合わせた一つのパラメーター $\mathcal{K}$ に依存することが分かる[137]*8)．

こうしてトポロジカル・ツイストにより得られた理論のラグランジアンはと

---

*7) $SO(3) \times SO(3) \times SO(2) \simeq SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ のもとで，$SO(6) \simeq SO(4)$ の $\mathbf{4}$ 表現は $(\mathbf{2},\mathbf{1})_1 \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2})_{-1}$，また $\mathbf{6} = \wedge^2\mathbf{4}$ 表現は $(\mathbf{2},\mathbf{2})_0 \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1})_2 \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1})_{-2}$ と分解する．

*8) 正確な関係式は

$$
\mathcal{K} = \frac{\tau + \overline{\tau}}{2} + \frac{\tau - \overline{\tau}}{2}\left(\frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}}\right)
\tag{7.21}
$$

である．

ある超対称チャージ $\mathcal{Q}$ について $\mathcal{Q}$–完全であり，従って理論はトポロジカルになっているが，今考えているように境界が存在するときにはそこでの境界項を考慮に入れなければならない．実は，境界項は複素化されたレベル $t=\mathcal{K}/2$ を持つ複素チャーン＝サイモンズ理論なのだ[133], [138]*9)．これは，3 次元多様体上の理論が 3 次元チャーン＝サイモンズ理論であることの導出を与えているといってよく，前章 (6.21) 式周辺で説明した [115], [116] による計算を一つ次元を下げたものになっている．

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は無限遠点を持つのでそこでの境界条件も指定しないとその分配関数は定まらない．このためには，((7.16) で説明したように) α でラベルされる $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続を考えればよい．このときの主張は

$$Z_{\alpha}^{\text{4d } G\ \mathcal{N}=4}[\mathbb{R}_{\geq 0}\times M_3]=Z_{\alpha}^{\text{3d } G_{\mathbb{C}}\ \text{CS}}[M_3](t)\ . \tag{7.22}$$

但し右辺は (7.16) で導入した量である．

さて，もとの S_b^3 に戻ろう．S_b^3 は二つのソリッドトーラスをその境界での S 変換で貼り合わせて得られた．3 次元チャーン＝サイモンズ理論の分解 (7.18) は，ソリッドトーラスへの分解と同定するのが自然である．

ソリッドトーラスの貼り合わせとして，まず二つのソリッドトーラスをそのまま貼り合わせることを考えよう．このとき得られるのは $S^1\times S^2$ であり，[115] における 5 次元局所化の結果より t は純虚数であって

$$t=-i\frac{8\pi^2}{g_5^2}\ ,\quad \bar{t}=i\frac{8\pi^2}{g_5^2} \tag{7.23}$$

となる．t と $\bar{t}$ は符号が逆であるが，これは二つの境界の向きが逆であるので，バルクの作用の部分積分で得られる境界上のチャーン＝サイモンズ項の符号が逆になることを意味している．$S^1\times S^2$ 分配関数（第 4.3 節の最後で触れた）については本書では説明しないが，その分配関数が局所化によって計算されていることは知っておいてもいいだろう．

今度は S_b^3 を得ることを考えよう．直接の局所化から与えられる答えは*10)

$$k=1\ ,\quad \sigma=-i\frac{|b-b^{-1}|}{b+b^{-1}} \tag{7.24}$$

であり（特に，レベル k は 1），よって（一般性を失わずに $b\leq 1$ として）

$$t=1+\frac{|b-b^{-1}|}{b+b^{-1}}=\frac{2}{1+b^2}\ ,\quad \bar{t}=1-\frac{|b-b^{-1}|}{b+b^{-1}}=\frac{2}{1+b^{-2}} \tag{7.25}$$

となる．特に，t と $\bar{t}$ は $b\to b^{-1}$ により置き換わるが，これは S 変換によって二つのソリッドトーラスの境界トーラスの二つのサイクルが入れ替わること，またその二つの大きさはそれぞれ b と b^{-1} であったこと（図 4.3）と両立して

*9) 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論及びそのツイストはゲージ場の運動項を持つので，そこから境界にチャーン＝サイモンズ項が現れるという議論自体は第 5.2.3 節と同様である．

*10) これは [116] に従うが，i のファクターを修正した．[139], [140] も参考．

いる．

(7.1) 式に戻ると，$S^1 \times S^2, S_b^3$ のどちらの場合も，複素チャーン＝サイモンズ理論の分解 (7.18) が存在する筈である：

$$Z_{S^1 \times S^2, S_b^3}(t, \bar{t}) = \sum_{\alpha, \bar{\alpha}} n_{\alpha, \bar{\alpha}} Z_\alpha(t) \bar{Z}_{\bar{\alpha}}(\bar{t}) \ . \tag{7.26}$$

実際この分解については分配関数の具体形を用い，具体的な 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論について直接のチェックがなされている[141],[142]他，局所化による導出もなされている[143],[144]（こうして現れた $Z^\alpha(t)$ のことを**正則ブロック**（**holomorphic block**），また (7.26) の分解を**ヒッグズブランチ局所化**（**Higgs branch localization**）*11) と呼ぶ）．

さて，5 次元理論から再度 6 次元理論に戻ろう．5 次元理論は 6 次元理論の自由度（で少なくとも超対称性の一部を保つ部分）を全て含むと期待されるので，分配関数の値は変わらないことが期待される．しかし，展開の仕方は変わるべきである．現在の t^{-1} での展開 (7.19) は t の値が大きい時によいが，それは g_5 の値が小さいとき，つまり (6.17) を参照すると 6 次元方向の半径 R が小さい時である．

6 次元方向の半径 R が大きい時には g_5 は大きく，従って t の値は小さくなるので，t^{-1} での展開は悪くなる．$R \sim t^{-1}$ を逆温度 β と考えると，これは低温展開に他ならない．低温展開では基底状態からの励起状態についての足しあげであり，それぞれの励起状態は $e^{-\beta(\text{定数})}$ の形の寄与を持つ．従って，チャーン＝サイモンズ理論はパラメーター

$$q := e^{4\pi i/t}, \quad \bar{q} := e^{-4\pi i/\bar{t}}, \tag{7.27}$$

で展開を持ち，分解 (7.26) も

$$Z_{S^1 \times S^2, S_b^3}(t, \bar{t}) = \sum_{\alpha, \bar{\alpha}} n_{\alpha, \bar{\alpha}} Z_\alpha(q) \bar{Z}_{\bar{\alpha}}(\bar{q}) \tag{7.28}$$

と書き直される*12)．

(7.28) の形の分解の存在に気づくと一つの矛盾が解決される．注意深い読者ならば，(7.25) からは $b \to 0$ としても $t \to \infty$ とならず，チャーン＝サイモンズ理論の古典極限 $t \to \infty$ が 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の次元還元 $b \to 0$ と一致するというこれまでの筋書きと矛盾しているようにみえることに気づいたかもしれない．しかし，実際には分配関数が (7.27) にある $q, \bar{q}$ の関数に書き直され，そのとき

---

*11) 「クーロンブランチ局所化」の場合と同様，平坦な時空での真空のモジュライは曲がった時空（S_b^3）での真空のモジュライとは異なることには注意が必要である．

*12) このように，ある無限和を，別のパラメーター領域で有効な別の無限和に置き換えることは，例えばグロモフ＝ウィッテン不変量（Gromov-Witten invariant）をゴパクマー＝ヴァッファ不変量（Gopakumar-Vafa invariant）に書き直すときにも現れる．

$$q = e^{4\pi i/t} = e^{2\pi i(1+b^2)} = e^{2\pi i b^2}\ , \quad \overline{q} := e^{2\pi i b^{-2}}. \tag{7.29}$$

つまり，$b \to 0$ は古典極限 $q \to 1$ に確かに対応している*13)．

7.3 古典極限

さて，(7.1) において両辺で $b \to 0$ 極限を取ることを考えよう．既に第 4 章で述べたように，S_b^3 分配関数の極限は積分形 (4.40) を取り，そこに有効ツイステッド・スーパーポテンシャルが現れたのであった．

既に前節で述べたように，複素チャーン＝サイモンズ理論の側で対応するのは古典極限 $t \to \infty$ である．古典的な鞍点は運動方程式 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{F}}_{\overline{\mathcal{A}}} = 0$ の解であり，その解のなすモジュライ空間は平坦接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{平坦}}(M)$ で与えられる．平坦接続は局所的にはいつもピュアゲージ（pure gauge）なので大域的な情報，つまりウィルソン・ループだけが非自明な情報である．これは数学的に書けば

$$\mathcal{M}_{\text{平坦}}(M) := \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G_{\mathbb{C}})/(G_{\mathbb{C}}\ \text{共役での同値類}) \tag{7.30}$$

である．

より具体的な記述を得るには，ラグランジアン (7.10) を次のように書き換えるとよい．$G_{\mathbb{C}}$ 接続の実部と虚部を $\mathcal{A} = A + i\phi$ と書くことにしよう．このとき，

$$\begin{aligned} L_{\text{複素 CS}} =& \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A - \phi \wedge D_A\phi\right) \\ &- \frac{\sigma}{2\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(F_A \wedge \phi - \frac{1}{3}\phi \wedge \phi \wedge \phi\right) \end{aligned} \tag{7.31}$$

を得る．但し D_A は A に対する共変微分 $D_A := d + A$ であり，また $F_A := dA + A \wedge A$ は A の場の強さである．このラグランジアンのうち，ゲージ変換で変換する可能性があるのは実部 A に対するチャーン＝サイモンズ項である．ゲージ群 $G_{\mathbb{C}} = SL(N, \mathbb{C})$ はその極大コンパクト部分群 $G = SU(N)$ に可縮であるので第 7.1.1 節と同様の議論から k の値が整数に量子化されなければならないことが従う．また σ の値は量子化される必要が無いが，ユニタリティー（のユークリッド空間版）の要請から $\sigma \in \mathbb{R}$ であるか，$\sigma \in i\mathbb{R}$ である*14)．

式 (7.10) で σ に比例する第 2 項を見ることにしよう．$A = \omega, \phi = e$ と書き直したとき，この項は

---

*13) 実軸上で $b \to 0$ とすると $\overline{q}$ が激しく振動してしまうので，b に小さな虚部を持たせてやる必要がある．

*14) 作用が複素共役と M_3 の向きの反転のもとで保たれるというのが要請である．A, ϕ が M_3 の向きを逆にしたときに符号を代えなければ $\sigma \in \mathbb{R}$，また ϕ のみが符号を代え A が符号を代えないときは $\sigma \in i\mathbb{R}$ である[132]．

$$-\frac{\sigma}{2\pi}\operatorname{Tr}\left((d\omega+\omega\wedge\omega)\wedge e-\frac{1}{3}e\wedge e\wedge e\right) \tag{7.32}$$

となる．これは $G_{\mathbb{C}}=SL(2,\mathbb{C})$ の時**スピン接続**（**spin connection**）ω と**ドライバイン**（**dreibein**）e によって定まる **3 次元重力**（**3d gravity**）のラグランジアン[*15)]

$$-\frac{1}{16\pi G_N}\operatorname{Tr}\left(R_\omega\wedge e+\frac{\Lambda}{3}e\wedge e\wedge e\right)\ ,\quad R_\omega:=d\omega+\omega\wedge\omega \tag{7.33}$$

においてニュートン定数 G_N と宇宙定数 Λ を

$$G_N=\frac{1}{8\sigma}\ ,\quad \Lambda=-1 \tag{7.34}$$

としたものに他ならない．さらに，3 次元重力のラグランジアン (7.33) を変分して古典解を調べると

$$R_\omega=-\Lambda e\wedge e\ ,\quad D_\omega e=de+e\wedge\omega=0\ . \tag{7.35}$$

このうち第 2 式はスピン接続をドライバインから決める式であり，第 1 式は定負曲率 $R=\Lambda<0$ の条件に他ならない．

このように複素 $SL(2,\mathbb{C})$ チャーン＝サイモンズ理論と 3 次元重力は古典解のレベルでは一致する[145]．但し，複素チャーン＝サイモンズ理論の古典解の全てが 3 次元重力で解釈を持つわけではない—3 次元重力では計量が正定値であるという条件が付いていたのだ．実際 $G_{\mathbb{C}}$ チャーン＝サイモンズ理論では幾何的解釈が明らかでなく，例えば解 $A_\mu=0$ も古典的な鞍点解として存在している．その意味で，古典解及びそのまわりの揺らぎを考える限りでは 3 次元重力で十分であるが，既に第 6 章で説明したように，本書の議論で 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論と関係するのは複素チャーン＝サイモンズ理論の方である．なお，参考までに，ここでの議論の一般化として，$G=SU(N), G_{\mathbb{C}}=SL(N,\mathbb{C})$ チャーン＝サイモンズ理論の時は高階スピンを許す重力理論と関係することが知られている．

3 次元重力の古典解，すなわち負定曲率 $R=\Lambda<0$ を満たす計量が存在する多様体を双曲多様体と呼ぶ．このとき，その古典解の周りで半古典近似を行うと，その主要部は (7.31)，(7.33) より

$$Z_{\text{複素 CS}}\longrightarrow\exp\left[\frac{-i\sigma}{2\pi}\mathrm{Vol}[M]+\frac{ik}{4\pi}\mathrm{CS}[M]\right] \tag{7.36}$$

となることが分かる．但し，$\mathrm{CS}[M]$ はチャーン＝サイモンズ形式を 3 次元多様体で積分して得られる量で，**チャーン＝サイモンズ不変量**（**Chern-Simons**

*15) スピン接続とやドライバインの意味については，一般相対論の教科書を参照．ω と R_ω との関係はゲージ場とその場の強さの関係の類似である．

invariant）と呼ばれる量である*16)．本書で考える状況では，非自明な双曲計量に対応する古典解は自明な平坦接続に対応する解よりも分配関数に大きな寄与を与える（これは自明な主張ではなく，後に第 7.3.2 節で述べる体積予想の言い換えとも言える）．以上の理由で，このセクションの残り及び第 9 章ではもっぱら非自明な双曲計量に対応する複素計量を考えることにする．

7.3.1　古典解としての 3 次元双曲幾何

前節では複素チャーン＝サイモンズ理論の古典解として負定曲率計量が現れることをみた．そのような計量を許す多様体は**双曲多様体**（**hyperbolic manifold**）と呼ばれる．

そこでここでは 3 次元双曲幾何学についての基本事項を手短にまとめておく．3 次元双曲幾何についてさらに学びたい向きにはサーストンによるレクチャーノート[146]及び本[147]が参考になる．また，3 次元の双曲幾何については日本語では [148], [149] があり，特に前者は本書と比較的近い内容を平易に扱っており参考になる．但し，本書で必要になる幾何的事実はごく僅かであるし，またその多くには超対称ゲージ理論の側に対応物が存在するので，（議論を逆転して 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論と 3 次元多様体の幾何の対応関係を仮定することにすれば）類推が可能である．

3 次元多様体の幾何構造（第 7.3.3 節参照）において，3 次元双曲構造はある意味最も一般的である*17)．3 次元双曲多様体は局所的に $\mathbb{H}^3$ と同一視される．3 次元の双曲空間 $\mathbb{H}^3$ は，ポアンカレ上半平面モデルでは上半平面

$$\mathbb{R}^3_{>0} := \{(x_1, x_2, y) |\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, y > 0\} \tag{7.37}$$

に計量

$$ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + dy^2}{y^2} \tag{7.38}$$

を入れたものとして定義される．この多様体は境界 $\partial H^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を持つ．また, $\mathbb{H}^3$ はアイソメトリー (等長写像, isometry) $PSL(2,\mathbb{C})$ を持つ．$SL(2,\mathbb{C})$ の行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表し, $\mathbb{H}^3$ の点 (x_1, x_2, y) を四元数として $h = x_1 + x_2 i + x_3 j$ と表したときに，$SL(2,\mathbb{C})$ アイソメトリーは計量 (7.38) に次のように作用する（これは**ポアンカレ延長**（**Poincaré extension**）と呼ばれる．演習問題 7.6）：

$$h \to (ah+b)(ch+d)^{-1} \ . \tag{7.39}$$

この作用は推移的（transitive）であり，各点での固定部分群は $SU(2)$ である

---

*16)　閉多様体ではこの量は既に見たように整数値を取る．多様体が境界を持つ場合には境界条件を指定する必要があり，不変量の値は境界条件に依存する．

*17)　脚註 21 参照.

(演習問題 7.6)．つまり $\mathbb{H}^3$ は**均質空間** (**homogeneous space,** コセット) である：

$$\mathbb{H}^3 = SL(2,\mathbb{C})/SU(2) \ . \tag{7.40}$$

通常の 3 次元双曲幾何では，双曲構造の定義に（コーシー列の収束によって定義される）完備性 (completeness) も入れることが多いようである．しかし，我々の目的のためには完備でない双曲構造をも考えることが重要であるので，本書では時に断らない限り完備性は仮定しない．

完備 3 次元双曲多様体は $PSL(2,\mathbb{C})$ のトージョンなし (torsion free) 離散部分群 Γ を用いて

$$M = \mathbb{H}^3/\Gamma \tag{7.41}$$

と書くことができる．但し，$PSL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群を**クライン群** (**Kleinian group**) と呼ぶのでこれは Γ がトージョンなしクライン群といってもよい．またトージョンがないとは Γ の作用が固定点を持たないことであり，商 (7.41) が滑らかな多様体であるために必要な条件である．

こうして 3 次元双曲幾何の研究は離散群の研究というより代数的な問題に置き換えられる，本書で扱う実際の応用例では，3 次元双曲多様体が初めから $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ の形で与えられていることは希であるが，M が与えられれば Γ は $\Gamma = \pi_1(M)$ として取り出すことができる．

双曲幾何においては，そのトポロジーを決めると対応する完備双曲構造が一意に定まることが知られている：完備双曲構造はその変形を許さない固い (rigid) 幾何である．この主張は**モストウ剛性** (**Mostow rigidity**) として知られており，グロモフ (Gromov) によるエレガントな証明が知られている．

既に我々はこの主張のゲージ理論対応物をみてきた．第 4.4.4 節で議論した 3 次元 S_b^3 分配関数における次元還元の極限 $b \to 0$ は，3 次元チャーン＝サイモンズ理論における古典極限 $t \to \infty$ に対応するのであった ((7.25) 及び (7.29) 参照)．さらに，完備双曲構造とは，古典極限での鞍点であり，2 次元理論の真空の方程式 (4.50) の解でもあった．今考えている 2 次元理論は有質量の (massive な) 理論であるので孤立した真空を持つ．つまり，**2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 理論の真空が孤立するという物理的性質が，3 次元古典双曲幾何における完備双曲多様体のモストウ剛性という数学的性質に翻訳された**ことになる．

7.3.2 ウィルソン・ラインと結び目の補空間

ここまでは複素チャーン＝サイモンズ理論の分配関数を考えたが，より一般の物理量の期待値を考えよう．今考えている理論には物質場は存在しないので空間的に局所的な演算子は存在せず，考えるべきは複素チャーン＝サイモンズ

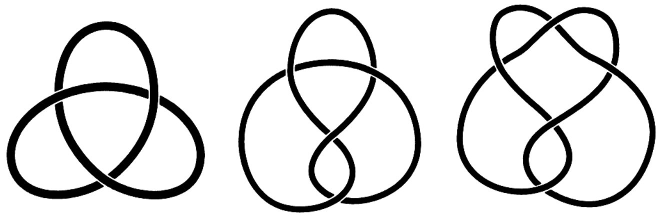


図 7.1 結び目の例．左から順に 3_1（三葉結び目），4_1（八の字結び目），5_2．結び目を膨らませたのが管状領域であり，S^3 でのその補空間が結び目の補空間と呼ばれる．交点数が小さいときの結び目については表が作られており，名前が付けられている．これはもともと Rolfsen の教科書[150]で与えられたが，その後誤りが見つかり訂正された．現在ではウェブページ[151]が便利である．

理論におけるウィルソン・ライン（第 1 章の (1.6)）である：

$$W_\gamma := \left\langle \mathrm{Tr}\, P \exp\left(\oint_\gamma \mathcal{A}\right)\right\rangle . \tag{7.42}$$

ここで，γ は 3 次元多様体 M の一次元的な閉路，つまり S^1 の M への埋め込みである．理論はトポロジカルであるので，ウィルソン・ラインは埋め込みのアイソトピー類にしかよらない（つまり結び目の連続変形で不変である）．数学的にはこれは S^3 の**結び目**（**knot**）を考えることに相当する*18)．

ウィルソン・ラインが存在するとき，ゲージ場に対する運動方程式を考えると，ウィルソン・ラインに沿ってデルタ関数型の特異点が現れることがすぐに分かるだろう．つまり，ウィルソン・ラインの効果は，それにそって特異性を持つゲージ場の境界条件を課し，そのもとで径路積分を行うことと同値である．これはピュア・チャーン＝サイモンズ理論におけるウィルソン・ループが非秩序演算子としても理解できることを意味する（非秩序演算子については第 3 章で定義したモノポール演算子も思い出されたい）．

特異性をうまく扱うため，1 次元的な結び目をわずかに膨らませて結び目の周りに管状の領域を考えよう．これを**管状領域**（**tubular neighborhood**）と呼び，$N(L)$ と書くことにしよう．これは実際結び目の絵（図 7.1）を描くときにはしばしば考えているものであり，数学的な結び目というのは結び目が細くなったときの 1 次元的な線のことである．この管状領域のサイクルでのホロノミーの値を決めることが境界条件にあたる．

径路積分は M のなかでの多様体の補空間

$$M \backslash N(L) \tag{7.43}$$

において行われる．これをリンク L の補空間と呼ぶ．本書では主に，S^3 の中

*18) 複数の S^1 の埋め込みを考えるときはリンク（link）と呼ぶ．本書では特に断らなければ（狭い意味での）結び目とリンクとを一括して（広い意味の）結び目と呼ぶ．

でのリンクの補空間を考える*19)．結び目の補空間はそれ自体3次元多様体であり，従って対応する3次元$\mathcal{N}=2$理論を定めることになる*20)．

こうして構成された**結び目の補空間**（**knot complement**），より一般に**リンクの補空間**（**link complement**）は双曲多様体の最も重要な例の一つである．というのも，S^3の結び目を考えると，その結び目が**トーラス結び目**（**torus knot**）と**サテライト結び目**（**衛星結び目，satellite knot**）の場合を除けば常に双曲構造が入ることが知られているからである（サーストンによる結果）*21)．ここで，トーラス結び目とはトーラスの上に書くことができる結び目のことであり，サテライト結び目とは，トーラス結び目が乗ったトーラス自体をS^3のとある結び目の管状近傍となるように配置して得られる結び目のことである．また，結び目の補空間に双曲構造が入るとき，その結び目を**双曲結び目**（**hyperbolic knot**）と呼ぶ．

既に述べたように，双曲多様体の取り方は離散群Γ (7.41) の取り方によって決まったのであった．この群Γは$M=S^3\backslash L$の基本群$\pi_1(M)$である．Mの基本群$\pi_1(M)$の生成元と関係式を用いた表示は結び目の射影表示から機械的に構成できることが知られている（ヴィルティンガー表示（Wirtinger representation））が，基本群は非可換群なのでそれを直接取り扱うのは容易ではない．

そこで注目するのは$M=S^3\backslash L$の境界である．$S^3\backslash L$の境界はLの管状領域の境界と（向き付けの違いを除いて）一致し，それは定義によってn成分のリンクに対してn個の2次元トーラス$\overbrace{T^2\cup\ldots\cup T^2}^{n}$であり，結び目・リンクの取り方を変えても$n$の値が変わるだけで現れるのは常にトーラスである．その基本群は，各々のトーラスに対して二つの独立なサイクル，いわゆるα-サイクルとβ-サイクルが存在し，それらの元は全て互いに交換する．

勿論，$\pi_1(\partial M)$は$\pi_1(M)$とは別の群である．しかし，自然な埋め込み$\partial M\rightarrowtail M$が存在するので，対応して写像

$$\pi_1(\partial M)\rightarrowtail\pi_1(M) \tag{7.44}$$

*19) 文献ではより正確に，結び目の補空間$S^3\backslash K$と結び目の**外部**（**exterior**）$M\backslash N(L)$を区別することもある（境界を含むかどうかが異なる）．

*20) 19世紀後半に，ケルヴィン卿はエーテル中の結び目を用いて原子を分類しようとした．その理論は失敗に終わったが，彼の考察は数学における結び目理論の発展を刺激し，100年以上の時を経て3次元ゲージ理論の分類に用いられることとなった．

*21) 実は，ある種の方法でランダムに結び目を生成すると，ほぼ1に近い確率でサテライト結び目であることが知られているらしい[152]．結び目の全体にどのような測度をいれて確率を議論するべきかは明らかではないことを差し引いたとしても，必ずしも双曲結び目自体がジェネリックだというわけではない．しかし，任意の閉3次元多様体はその中から適切な双曲結び目を選ぶことができ，もとの多様体はその双曲結び目の補空間にデーン埋め込みをすることで構成できることが証明されており[153]，この意味で双曲結び目は十分一般的とも言える．

が存在することになる．従って，平坦接続のモジュライ (7.30) に対しては，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{平坦}}(M) &= \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G_{\mathbb{C}})/(G_{\mathbb{C}}\ \text{共役}) \\ &\rightarrowtail \mathcal{M}_{\text{平坦}}(\partial M) = \mathrm{Hom}\left(\pi_1(T^2)^n, G_{\mathbb{C}}\right)/(G_{\mathbb{C}}\ \text{共役})\end{aligned} \tag{7.45}$$

という埋め込みが得られる．

簡単のためリンクではなく結び目の場合（$n=1$）を考えることにし，$G_{\mathbb{C}}$ として $SL(2,\mathbb{C})$ を取ることにしよう．このとき，境界トーラスの α-サイクルと β-サイクルに対応するホロノミーは交換し，$SL(2,\mathbb{C})$ の元で共役を取ることで

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}} & * \\ 0 & \mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \rho(\beta) = \begin{pmatrix} \mathfrak{l} & * \\ 0 & \mathfrak{l}^{-1} \end{pmatrix} \tag{7.46}$$

と書くことができる．このとき $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{l}$) のことを**メリディアン**（**meridian**）（**ロンギチュード**（**longitude**））と呼ぶ．注意すべきは，(7.46) のようにゲージ固定しても，また離散ワイル群の作用 $(\mathfrak{m},\mathfrak{l}) \leftrightarrow (\mathfrak{m}^{-1},\mathfrak{l}^{-1})$ が固定されずに残っていることである．この自由度も固定するには，$\mathfrak{m}^{1/2}$ の 2 乗，つまり $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{l}$ を考えればよい．(7.46) ではその点を先回りしてメリディアンの定義にあらかじめ $\mathfrak{m}^{1/2}$ と平方根を取っておいた．

さて，この場合に埋め込み (7.45) に戻ると，

$$\mathcal{M}_{\text{平坦}}(M) \subset \mathcal{M}_{\text{平坦}}(\Sigma) = (\mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}^{\times})/\mathbb{Z}_2 \tag{7.47}$$

となるが，実は $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{l}$ の適切なローラン多項式 $A(\mathfrak{l},\mathfrak{m})$ を用いて

$$\mathcal{M}_{\text{平坦}} : \{A(\mathfrak{l},\mathfrak{m}) = 0\} \tag{7.48}$$

となることが知られている[154]．この多項式を ***A*-多項式**（***A*-polynomial**）と呼ぶ．

なお，複素チャーン＝サイモンズ理論を結び目の補空間で考えた時，その古典極限 (7.36) は，**体積予想**（**volume conjecture**）（原論文は [155], [156], レビューとしては例えば [157]）という数学的主張と読み直される[158]．体積予想が主張することは，***N*-色付きジョーンズ多項式**（***N*-colored Jones polynomial**）$J_{L,N}(q)$ と呼ばれる結び目の不変量を考えたとき（ここで L は結び目，$N>1$ は整数），

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2\pi \log\left(J_{L,N}(q = e^{\frac{2\pi i}{N}})\right)}{N} = \mathrm{Vol}(L) + i\mathrm{CS}(L)\ . \tag{7.49}$$

この右辺が複素チャーン＝サイモンズの古典極限 (7.36) と一致すること，またコンパクト群のチャーン＝サイモンズ理論が結び目のジョーンズ不変量と関係していること[125] などから，先の主張が朧げにでも想像できるだろう．これらについては日本語では [159] が参考になる．

ここまで専ら古典解を議論してきたが，複素チャーン＝サイモンズ理論には古典解も周りの揺らぎも存在する．例えば1ループ補正を考えると，**ライデマイスター・トージョン（Reidemeister torsion）**が得られる．さらに高次のループを考えると無限個の結び目の保存量が得られ興味深い数学的対象である*22)．

7.3.3 コラム：3次元多様体の幾何構造

本書の主題からはやや外れるが，この機会に多様体の幾何構造についてコメントしておこう．

トポロジカルな多様体 M が与えられたとしよう．このとき，多様体（モデル幾何）H によって与えられる M 上の**幾何構造（geometric structure）**とは M の開集合による被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ 及び写像 $\phi_i : U_i \to H$ の組 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ であって次の二つを満たすもののことである*23)：

ア　全ての $i \in I$ について ϕ_i はその値域への同相写像である．

イ　$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ の時，変換関数

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j) \tag{7.50}$$

を $\phi_j(U_i \cap U_j)$ の各連結成分に制限したものは H の向きを保つ**アイソメトリー**である．

変換関数の性質が多様体の定義を決めたことを思い出そう：位相的な多様体の定義では変換関数は同相写像であるし，可微分多様体では変換関数は微分同相写像であった．今の幾何構造の定義では変換関数が H のアイソメトリーでなければならないので通常の多様体の定義よりも条件が厳しい．多様体 H の定義を変えることにより異なる幾何構造を定義することができる．こうして定義される幾何構造を分類するのがクライン（Klein）によるエルランゲン・プログラム（Erlangen program）の思想である．

閉2次元多様体は多様体の種数によって分類されるが，3次元多様体の時は分類はもっと複雑である．全ての3次元多様体は（球面及びトーラスに沿って）分解したとき，その各ピースに次の8つの幾何構造のうち少なくとも一つを持つことが知られている：8種類の多様体 H は

$$H = \mathbb{S}^3\ ,\quad \mathbb{E}^3\ ,\quad \mathbb{H}^3\ ,\quad \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}\ ,\quad \mathbb{H}^2\times\mathbb{R}\ ,\quad \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}\ ,\quad \mathrm{Nil}\ ,\quad \mathrm{Sol} \tag{7.51}$$

である．但し，$\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆（universal cover）であり，Nil（nilmanifold）及び Sol（solvmanifold）については本書では使わないのでここでは説明しない．ちなみに，複数の幾何構造を持つ3次元多様体の例も存在するので上の8つは排他的な分類を与えるものではない．

この結果は元々80年代にサーストン（W. P. Thurston）によって提唱された**幾何化予想（geometrization conjecture）**であり，ペレルマン（G. Perelman）によ

---

*22) 同様の量はコンパクト群 G に対してはいわゆるチャーン＝サイモンズ摂動論として数学的にも定式化されている．ゲージ群が非コンパクト $G_{\mathbb{C}}$ の時も話は似ているが，例えば定義される不変量は有限型（finite type）ではないなど本質的な違いも存在する．

*23) 我々の実際の応用のためには境界付きの場合を含めるために定義を若干拡張しておく必要があるが，ここでは述べない．

り証明がなされた．この系としてミレニアム問題であったポアンカレ予想（単連結なコンパクト 3 次元多様体は S^3 に位相同相である）が従うのでニュースを耳にした人も多いだろう．

$\mathbb{S}^3$ の幾何構造（ザイフェルト多様体）の場合については例えば [160] の議論が参考になる．3 次元多様体の分類と 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の分類の正確な対応は分かっていないが，例えば AdS/CFT 対応での対応する重力解において既知のものは双曲多様体のみを用いて構成されている[161]．

演習問題

7.1 （レベルの量子化）チャーン＝サイモンズレベルの量子化を本文中とは別の方法で導こう．

(a) [♦] ゲージ変換

$$A \to g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{7.52}$$

のもとで，場の強さ $F = dA + A \wedge A$ は

$$F \to g^{-1}Fg \tag{7.53}$$

と変換すること，またこのとき，作用 (7.2) が

$$iL_{\mathrm{CS}}[A] \to iL_{\mathrm{CS}}[A] + \frac{ik}{4\pi}\int_M d\,\mathrm{Tr}(dg \wedge g^{-1}A) - \frac{ik}{12\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left((g^{-1}dg)^3\right) \tag{7.54}$$

と変換することを直接の計算によって示せ．なお，後半は (7.2) を

$$\frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge F - \frac{1}{3}A \wedge A \wedge A\right) \tag{7.55}$$

と書いておくと便利かもしれない．

(7.54) の第 2 項は全微分なので閉多様体上で積分すると消え，また第 3 項 $-\frac{ik}{12\pi}\frac{i}{3}\mathrm{Tr}((g^{-1}dg)^3)$，あるいは成分で書けば*24)

$$-2\pi i\frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g\right) \tag{7.56}$$

は $2\pi i\mathbb{Z}$ の元であることが知られているから，$k \in \mathbb{Z}$ のとき作用の値は一意に定まることが分かる．

(b) [♦] (7.56) は数学的にはゲージ群 G のホモトピー群 $\pi^3(G)$ の元を表している．その値（**巻き付き数** winding number）が整数になることを簡単な例で確認してみよう．$G = SU(2)$，また 3 次元多様体を S^3 に取ろう．このとき S^3 は群多様体としては $SU(2)$ でもあるから，$g : S^3 \to SU(2)$ として自明な写像が取れる．それは S^3 の点を $(x_1, \ldots, x_4)$ （$x_1^2 + \ldots x_4^2 = r^2$）で表すと

$$g(x) := \frac{x^4 + ix^\mu\sigma^\mu}{r}, \quad \mu = 1, 2, 3 \tag{7.57}$$

と書けることを納得せよ．また，対応する (7.56) の値を計算し，

*24) この項のことを**ウェス＝ズミノ項**（**Wess-Zumino term**）と呼ぶ．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\int_{S^3}\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g\right)\\&\qquad = i^3\frac{1}{24\pi^2}3!\frac{1}{r^3}(2\pi^2 r^3)\mathrm{Tr}\left(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\right)=1\end{aligned} \tag{7.58}$$

となることを示せ（ヒント：$g(x)$ は S^3 上の恒等写像であり，被積分関数は S^3 の座標によらず，よって例えば $x_4=1, x_1=x_2=x_3=0$ で評価してよいことを用いて計算を簡単化するとよい）．同様に

$$g(x)=\left(\frac{x^4+ix^\mu\sigma^\mu}{r}\right)^n, \quad n\in\mathbb{Z} \tag{7.59}$$

を考えると巻き付き数 n が得られることを示せ．

(c) [♦♦] なお，注意深い読者はここでの説明と本文中での説明が違うように見えることが気になるだろう．数学的には (7.56) の元はゲージ群 G のホモロジー群 $H^3(G,\mathbb{Z})$ を表しており（$g^{-1}\partial_\mu g$ の 3 次のべきであることが H^3 であることの理由），一方本文中の議論で用いた $p_1(F)$ (7.6) はゲージ群 G の分類空間（classifying space）BG のコホモロジーを用いて $H^4(BG,\mathbb{Z})$ として表される特性類（characteristic class）である．ここで，普遍束（universal bundle）$G\to EG\to BG$ から従う完全系列を用い，写像 $H^4(BG,\mathbb{Z})\to H^3(G;\mathbb{Z})$ が存在することを示せ．（この写像は 3 次元チャーン＝サイモンズ理論と**ウェス＝ズミノ＝ウィッテン模型（Wess-Zumino-Witten model）**の対応の数学的表現である．$G=SU(N)$ の時にはこの写像は同型になるが，一般に単連結ではない群を考えると全射ではなくなる．これらの事項，またより一般の[*25]チャーン＝サイモンズ項の定義については [162] を参照．）

7.2 [♦♦]（レベルの 1 ループ補正）

コンパクト群に対するチャーン＝サイモンズ項のレベル k の値は，1 ループ補正により

$$k \longrightarrow k+c_2(G) \tag{7.60}$$

となる[*26]．ここで $c_2(G)$ はゲージ群の**双対コクセター数（dual Coxeter number）**（あるいは **2 次のカシミア（quadratic Casimir）**）であり，リー環の完全反対称の構造定数 f_{abc}（リー環の生成元 $\{T^a\}$ について $[T^a,T^b]=if^{abc}T^c$）によって

$$f^{abc}f^{bcd}=c_2(G)\,\delta^{ad} \tag{7.61}$$

により定義される．これはリー環の随伴表現 $\rho((T^a)_{bc})=if^a_b c$ において元 T^bT^b が自明な元であること

$$\rho\left((T^bT^b)_{ad}\right)=c_2(G)\,\mathrm{id} \tag{7.62}$$

を表している（T^bT^b はリー環の全ての元と交換するので，リー環の表現が既約だとするとシューアの補題（Schur's lemma）により単位元に定数倍を除いて一致しなけ

---

*25) 本文中の定義では 3 次元多様体 M 上のバンドルが 4 次元多様体 V に拡張できることを仮定したが，より一般にはベクトルバンドルを 4 次元多様体に拡張できないことが起こり得るので本文中の定義は最も一般のものではない．但し，これらの微妙さは本書の為には重要でない．

*26) 文献によっては $c_2(G)$ はここでの 2 倍と定義されているので注意が必要である．その場合は例えば $c_2(SU(N))=2N$ となる．

ればならない）．例えば $SU(N)$ に対して $c_2(SU(N)) = N$ である．

1 ループ補正 (7.60) については[125]に指数定理と η–不変量を用いた説明があるが，ここでは直接のループ計算によって確認してみよう．なお，この $k \to k + c_2(G)$ のシフトを導くだけならばゲージ場のプロパゲーターを考えればよいが，ゲージ場の 3 点について 1 ループ補正を確認するには

$$f^{afd} f^{bde} f^{cef} = \frac{c_2(G)}{2} f^{abc} \tag{7.63}$$

が必要となる．最後の式を理解するには例えば随伴表現で $\rho(T^d T^c T^d)_{ab}$ を考えるとよい．これらの計算の詳細については例えば [163], [164] が参考になる．

7.3 [♦]（エアリー関数における積分サイクル）複素チャーン＝サイモンズ理論の積分サイクルの取り方について理解を深めるには，有限次元の場合を考えるとよい[133]．例として，エアリー（Airy）積分を考えよう：

$$Z := \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp\left(i\lambda \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right) . \tag{7.64}$$

ここで λ を複素数に取ろう．このとき，被積分関数が収束するのは x 平面での無限遠方のどの方向か？ 線形独立な積分サイクルの取り方はいくつあるだろうか？（参考までに，このエアリー積分の漸近展開の形は複素平面上の異なる領域では（線形変換で結び付いた）異なる表式を持つ．これは**ストークス現象**（**Stokes phenomenon**）と呼ばれ，エアリー積分はその典型例である．）

7.4 [♦]（3 次元重力）ユークリッド計量及びローレンツ計量の 3 次元重力において，宇宙定数 (cosmological constant) $\Lambda = \pm 1$ を考える．このとき，対応するチャーン＝サイモンズ理論のゲージ群は何であるか？ 計量の符号数（signature）や宇宙定数の符号によって結論はどう変わるか？

7.5 [♦]（ポアンカレ延長）変換 (7.39) が $\mathbb{H}^3$ のアイソメトリーであることを直接の計算によって確かめよ．また，変換 (7.39) が境界 $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への一次分数変換

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} , \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.65}$$

の $\mathbb{H}^3$ への自然な拡張であることを確認せよ．また，各点における作用の固定部分群が $SU(2)$ であることを確かめよ．

7.6 [♦]（均質空間としての $\mathbb{H}^3$）均質空間 (7.40) に $SL(2, \mathbb{C})$ の標準的な計量から誘導される計量を求め，それが (7.38) で与えられることを示せ．

第8章
古典・量子タイヒュミュラー理論

2次元リーマン面上での双曲構造の変形を記述するタイヒュミュラー理論及びその量子化についてまとめる．ここでは特に4次元理論の赤外理論のループ演算子の期待値に対応する座標（フォック座標）が大きな役割を果たす．

8.1 古典タイヒュミュラー理論

8.1.1 まず2次元から始めよ

前章では3次元複素チャーン＝サイモンズ理論について調べ，それに付随した3次元双曲幾何及び3次元多様体 M 上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続について議論した．しかし，3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論との関係を理解するには，より詳細な情報，例えば $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間の座標について知ることが必要である．

本章では，その $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のなすモジュライ空間を，まず2次元リーマン面上で調べておこう．第6章で述べたように，現れるのは $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続の空間であるヒッチン系であり，すぐ次に説明するようにその実スライス（$SL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続の空間）の一つの連結成分が**タイヒュミュラー空間**（**Teichmüller space**）である．$SL(2,\mathbb{C})$ 接続と $SL(2,\mathbb{R})$ 接続は後者が前者の実スライスという関係にあり，両者の関係は自明ではないが，本章での議論のためには区別に神経質になる必要はない．以下では主として後者の言葉を用いる．

2次元多様体の場合の本書の解析の大部分は，次章での3次元多様体の場合の解析に翻訳することができる．2次元双曲幾何は前章の3次元双曲幾何と深い関係にあり，本章での議論は前章での議論と類似するところもかなり多い*1)．

*1) これは双曲空間 $\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^3$ の向きを保つアイソメトリーが $PSL(2,\mathbb{C})$ と $PSL(2,\mathbb{R})$ であり片方がもう一方の実スライスであることも大きい．このような関係は $\mathbb{H}^n$ と $\mathbb{H}^{n+1}$ で $n \geq 3$ に対しては成り立たないことに注意されたい．

8.1.2 タイヒュミュラー空間

まず古典的な（つまり量子化する以前の）タイヒュミュラー空間について簡単にまとめておこう．

本章では専ら $G_{\mathbb{R}} = SL(2,\mathbb{R})$，$G_{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$ の場合を取り扱う（一般の $G_{\mathbb{R}} = SL(N,\mathbb{R}), G_{\mathbb{C}} = SL(N,\mathbb{C})$ の場合については第 9.4.3 章での高次タイヒュミュラー理論についてのコメントを参照されたい）．

$PSL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続の実スライスである $PSL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続のモジュライ空間は複数の連結成分を持つが，その内の一つがタイヒュミュラー空間であり*2)，それを研究するのが**タイヒュミュラー理論**（**Teichmüller theory**）である．タイヒュミュラー空間は，平坦接続の空間のうち，接続から作られる計量が可逆である成分だと考えることができる．また，タイヒュミュラー空間は曲面上の**双曲構造**（**hyperbolic structure**）の空間だとも考えることができ，また共形変換のもとでの計量の同値類の空間とも看做せる（第 6.2 節の最後のコメント参照）．

タイヒュミュラー理論は長い歴史を持ち，文献も多い（例えば [166], [167]）．物理では超弦理論の摂動論の文献においてしばしば言及があるが，下で述べる座標にまで言及しているものは少ないようである．また，本章及び次章の数学的内容について本書に比較的近い立場から述べた文献 [168] も参考になるだろう．

2 次元多様体上の場合，その幾何構造（前章の第 7.3.3 節参照）には 3 種類のみ存在することが知られている（**一意化定理**（**uniformization theorem**））．それは 2 次元球面 $X = \mathbb{S}^2$ に対応する球面構造 (spherical structure)，2 次元ユークリッド平面 $X = \mathbb{E}^2$ に対応するユークリッド構造（Euclidean structure），そして双曲構造の三つである．

このなかで本書が主として考えたいのは双曲構造である．なお，3 次元多様体の場合に双曲構造（モデル幾何は $H = \mathbb{H}^3$）が最も一般的であったのと同様に，2 次元曲面の場合にも双曲構造（$H = \mathbb{H}^2$）がもっとも一般的である．このことをみるために，種数 g，パンクチャーの数が h の 2 次元曲面を考え，それを Σ と書こう．種数とパンクチャーの数を強調したいときは $\Sigma_{g,h}$ と書くこともある．このとき，この曲面が双曲構造を持つための条件はそのオイラー数 (Euler number）が負であることである：

*2) $PSL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続があるとそれに付随して 2 次元面上に $\mathbb{RP}^1$-束が定まる．$PSL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続の連結成分はこの $\mathbb{RP}^1$-束のオイラー数 χ によってラベル付けされることが知られており，さらに χ は種数が g の閉リーマン面上では $|\chi| \leq 2g-2$ を満たすことが知られている[165]．タイヒュミュラー空間は $\chi = 2g-2$ でラベルされる成分のことである．タイヒュミュラー成分ではそのオイラー数は正であり，$PSL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続は同時に $SL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続でもある．このことが理由で，本章では $PSL(2,\mathbb{R})$ と $SL(2,\mathbb{R})$ は厳格には区別しない．但し同様の主張は他の成分では成り立たない．例えば $SL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続はそのオイラー数では分類されず，例えば種数 2 では 33 個の成分を持つらしい．

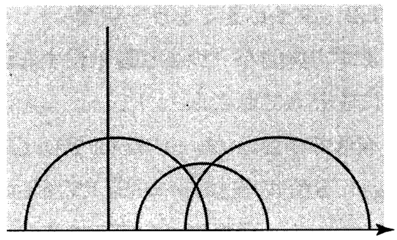


図 8.1　$\mathbb{H}^2$ の測地線は軸 $y=0$ に直交する半円及び垂直な直線である.

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - h < 0\,. \tag{8.1}$$

この条件は，ごく少数の例外 ($g=0, h=0,1,2$ または $g=1, h=0$) を除いて成り立っている．特に，必要ならば適宜パンクチャーを付け加えることでこの条件を満たすことができる．

(8.1) が満たされるとき，2 次元多様体は局所的には 2 次元双曲空間 $X=\mathbb{H}^2$（双曲平面）と同一視される（つまり双曲構造を持つ）．但し，ここで $\mathbb{H}^2$ は

$$\mathbb{H}^2 := \{(x,y)|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{8.2}$$

に計量

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \tag{8.3}$$

を与えたものである．これは 2 次元双曲空間の**ポアンカレ上半平面モデル（Poincaré upper half plane model）**と呼ばれるものである．

$\mathbb{H}^2$ の向きを持つアイソメトリー $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ は $PSL(2,\mathbb{R})$ であり*3)，$\mathbb{H}^2$ はそれを部分群 $SO(2)$ で割って得られる均質空間 $PSL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ である．また，$\mathbb{H}^2$ での測地線は軸 $y=0$ に直交する半円及び垂直な直線である（図 8.1 及び演習問題 8.2 参照）．

なお，全ての完備双曲多様体は $\mathbb{H}^2/\Gamma$ の形に書けることが知られている（カルタン (Cartan) とアダマール (Hadamard) による定理)．ここで，Γ は $PSL(2,\mathbb{R})$ の**フックス群（Fuchsian group）**と呼ばれる離散群であり，固定点を持たずに（自由に）作用する．

タイヒュミュラー空間は複素多様体であり，その複素次元は

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_{g,h} = 3g-3+h \tag{8.4}$$

であることが知られている．さらに，タイヒュミュラー空間は $\mathbb{R}^{6g-6+2h}$ の有限領域で与えられることが知られている．

例えば，球面 $g=0$ の時には，次元は $h-3$ となる．球面は複素平面に無限遠点を足

*3)　立体射影によって $\mathbb{H}^2$ をリーマン球 $\mathbb{C}\cup\{0\}$ に移したとき，アイソメトリーはリーマン球の一次分数変換で与えられる．

したもの $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と考えることができるので，各パンクチャーごとにその位置を示す複素パラメーターが一つあるのは自然だろう．但し，球面には一次分数変換（fractional linear transformation）で表される自己同型群 $SL(2,\mathbb{C})$ が存在するので，その次元を引くことにすると $h-3$ となる．

同様に，トーラス $g=1$ の時には，複素次元は h となり，これはトーラス $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ 上でのパンクチャー位置を表すパラメーターであると解釈できる．

我々の目的の為にはパンクチャーの周りのホロノミーも合わせてより大きな**飾り付きタイヒュミュラー空間（decorated Teichmüller space）** $\tilde{\mathcal{T}}_{g,h}$ を考えるのが時に便利である．この空間の次元は

$$\dim_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{T}}_{g,h} = 2(3g-3+h)+h = 3(2g-2+h) \tag{8.5}$$

となる．この空間は一般に複素多様体ではなく，特にその実次元が奇数になり得ることに注意しよう．

8.1.3 フォック座標

さて，タイヒュミュラー空間に座標を考えたい．その物理的意味については後に補足することにして，ここではまず天下りに座標を導入しておく．

2 次元多様体の理想三角形への分割を考えよう（この分割を**理想三角形分割（ideal triangulation）**と呼ぶ）：

$$\Sigma = \bigcup_i T_i\ . \tag{8.6}$$

ここで，理想三角形（ここでは T_i と書いた）とは双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の三角形であって，その頂点が全て $\mathbb{R}\cup\{\infty\}=\partial\mathbb{H}^2$ 上にあるものである（図 8.2）．

$\mathbb{H}^2$ のアイソメトリーを使うことで，一般性を失わずに三つの頂点をそれぞれ $0,1,x$ に取ることができる（$x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$）．理想三角形を貼り合わせれば 2 次元曲面を得ることができるが，理想三角形の頂点は $\mathbb{H}^2$ の境界であり $\mathbb{H}^2$ に含まれておらず，2 次元曲面のパンクチャーになる．つまり，2 次元曲面の三角形分割で全ての頂点をパンクチャーに持つものが理想三角形分割である．

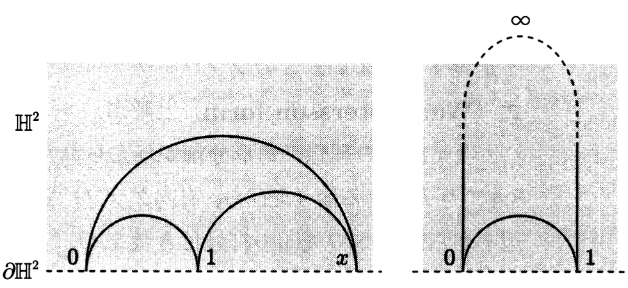


図 8.2　$\mathbb{H}^2$ の理想三角形はその三つの頂点を境界 $\partial\mathbb{H}^2$ に持ち，それを $0,1,x$ と書くことができる．右側のように $x=\infty$ でもよい．

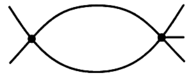


図 8.3 理想三角形分割においてこの図のような二角形は禁止する.

このような分割は 2 次元曲面が十分に多くのパンクチャーを含んでいれば可能である. 以下では理想三角形分割の存在は仮定する（なお, 三角形分割というときに, 図 8.3 のような二角形は許さないものとする).

理想三角形分割の面の数（F), 辺の数（E）そして頂点の数（V）は種数 g 及びパンクチャーの数 h から決定される：

$$F = 2(2g-2+h)\ , \quad E = 3(2g-2+h)\ , \quad V = h\ . \tag{8.7}$$

これを示すには,

$$3F = 2E\ , \quad \chi(\Sigma_{g,0}) = -V + E - F = 2g-2 \tag{8.8}$$

を用いればよい：最初の式は, どの三角形も 3 個の辺を持ち, 各々の辺は二つの面に含まれることから従う.

さて, ここで導入したい（飾り付き）タイヒュミュラー空間の座標は**フォック座標**（**Fock coordinate, shear coordinate**)（あるいは特に $G_{\mathbb{C}}$ 接続の場合は**フォック＝ゴンチャロフ座標**（**Fock-Goncharov coordinate**)）と呼ばれ*4), フォック座標は各辺 i ごとに変数 Z_i（及び $z_i := e^{Z_i}$）を対応させる. 式 (8.7) から辺の数は $3(2g-2+h)$ であるが, これは飾り付きタイヒュミュラー空間の実次元 (8.5) と一致することを確認しておこう.

フォック座標の一つの大きな利点は,（飾り付き）タイヒュミュラー空間の**シンプレクティック形式が定数になる**ことである.

まず, タイヒュミュラー空間は複素**ケーラー多様体**であり, 特に**シンプレクティック形式**（**symplectic form**)（非退化閉 2–形式）ω を持つ. 平坦接続の言葉では, その微小変化 $\delta\mathcal{A}$ に対し,

$$\omega := \int_{\Sigma} \mathrm{Tr}\,(\delta\mathcal{A} \wedge \delta\mathcal{A}) \tag{8.9}$$

と定義すればよい. このシンプレクティック形式を**ヴェイユ＝ピーターソン形式**（**Weil-Petersson form**）と呼ぶ.

2 次元曲面の理想三角形分割が与えられたとき, それぞれの三角形ごとに図 8.4 で与えられる箙（えびら, 有向グラフ）を書くことで箙が得られる. ここで, 辺 i から辺 j への矢印の符号付き数を $Q_{i,j}$ とすると, 定義から分かるように,

---

*4) 文献ではフォック座標とフォック＝ゴンチャロフ座標を使い分けることもあり, その正確な定義にはバリエーションがあるようだが, 簡単のため本書ではもっぱらフォック座標という言葉を用いる.

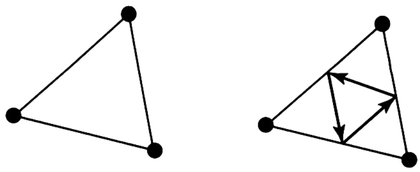


図 8.4　2 次元面の理想三角形分割が与えられた時，その三角形ごとに箙を書くことで対応する箙が得られる．このとき箙の頂点は三角形の辺に付随している．

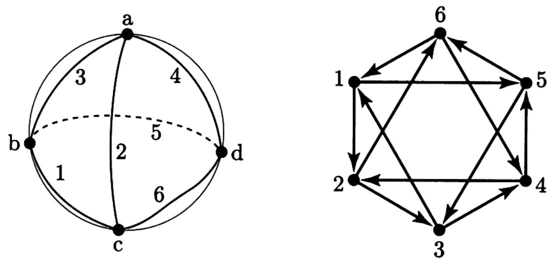


図 8.5　4 点球面の三角形分割から与えられる箙の例．三角形分割の面，辺，頂点の数はそれぞれ 4, 6, 4 である（図 8.7 を参照）．

$Q_{j,i} = -Q_{i,j}$ であり，常に

$$Q_{i,j} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \tag{8.10}$$

となる（図 8.10 及び図 8.5 の例を参照）．こうして得られた $Q_{i,j}$ を用いると，フォック変数のもとでのシンプレクティック形式 (8.9) は

$$\omega = \sum_{i<j} Q_{i,j} dZ_i \wedge dZ_j \tag{8.11}$$

となるというのが数学的な主張である．

8.1.4　ループ演算子としてのフォック座標

さて，ここまでの構成の物理的意味について，ごく大雑把ではあるがコメントしておこう．なお，本節でのコメントは数学的構成の物理的意味を知る上では有用であるが，それらを理解せずとも先に進むことは可能である．

まず，タイヒュミュラー空間は $PSL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続の空間（のある連結成分）であった．平坦接続は局所的には自明であったが大域的にはそうではなく，その情報は第 7 章と同様の議論で平坦接続をある閉路に沿って積分したホロノミーで表現される．これはその閉路の長さを与え，その長さと対をなすツイスト座標を加えることで**長さ・ツイスト座標（length-twist coordinate）**と呼ばれる座標が得られる*5)．

*5)　これはリーマン面の**パンツ分解（pants decomposition）**と呼ばれる分解に付随した座標である．パンツ分解では 3 点球面をシリンダーでつなぎ合わせるが，そのシリンダーのサイズを決めるのが長さ座標，またそのシリンダーをねじるのがツイスト座標である．

例として，4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論の時は，対応する 2 次元面 Σ は T^2 であったが，その閉路として独立なものは 2 次元トーラスの α-サイクルと β-サイクルの二つである．これらは第 1 章で説明したように，4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論での電荷と磁荷に対応していたので，それらに沿ってのホロノミーも電荷・磁荷に関連した量であるべきである．

ゲージ理論における自然な物理量で，チャージに付随しているのはウィルソン・ループやその S 双対であるト・フーフトループの期待値である．そこで，これらの**ループ演算子（loop operator）**の期待値がここまで議論してきた座標を与えるという予想に辿り着く．

この予想は T^2 とは限らない一般のパンクチャー付きリーマン面 Σ に拡張できる．つまり，Σ の閉路にそったホロノミーの分類と，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ に存在するチャージが対応することが予想される．

ここで議論している A_1 型の 6 次元 (2,0) 理論の場合には，$\mathcal{T}[\Sigma]$ がゲージ群 $SU(2)^{3g-3+h}$ である既知のラグランジアンを持ち，その場合は閉路とチャージの対応を直接に確認することができる[169]．

特に，$\mathcal{T}[\Sigma]$ のクーロンブランチの次元はタイヒュミュラー空間の次元と同じで

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{\text{クーロン}} = 3g-3+h \tag{8.12}$$

であり，同じ数だけの種類の電荷と磁荷を持つ．また，飾り付きタイヒュミュラー空間は実次元で h 増えるが，これは対応して理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ に h 個のフレーバー対称性が存在することと解釈できる．

ループ演算子の期待値が座標となることは次のようにして理解できる．第 6 章でみたように，我々は今 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S^1 コンパクト化を考えており，ループ演算子は S^1 に巻き付いている．従って，S^1 上で次元還元 (6.15) した時，そのループ演算子は 3 次元理論の粒子になる．4 次元でのクーロンブランチは随伴表現に値を持つ場 ϕ の期待値によってパラメーター付けされていたのであった．3 次元に次元還元すると，ゲージ場の S^1 方向のゲージ場の積分（ウィルソン・ラインの期待値）は 3 次元に新たな複素スカラー場 ϕ' を与え*6)，ϕ, ϕ' がペアをなして 3 次元のクーロンブランチをパラメーター付けする．従って，ループ演算子の期待値の複素化がクーロンブランチを指定する座標を与えるというのは自然であると納得できる．

ここまでの説明では不十分な点があった：こうして得られた座標は長さ・ツイスト座標であり，本章で我々が用いたかったフォック座標ではない．長さ・ツ

*6) ウィルソン・ラインは 3 次元の双対フォトンと組むことにより複素化される．第 3 章 (3.35) 式を参照．

イスト座標はこれまで議論したように紫外理論（ラグランジアン）のループ演算子の期待値であった．それではフォック座標の方はどうかというと，**フォック座標はクーロンブランチでの赤外理論のループ演算子の期待値である**と同定されるというのが文献での主張である[170]．ここまででは天下りかつ組み合わせ論的に与えられてきた理想三角形分割が，より物理的に構成される：4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の BPS 状態はリーマン面 C 上の測地線で与えられ，その測地線の族を考えることで，理想三角形分割を構成することができる（詳細は本書では必要としないが [170] 参照）．この理解からすると，シンプレクティック形式 (8.11) は（フレーバー対称性のチャージを含む）チャージのディラック量子化条件に他ならない．

8.1.5 フリップでの変換則

ここまでのフォック変数の定義では理想三角形分割を固定してきた．しかし，2 次元面の理想三角形分割は一意ではない．それでは，理想三角形分割を取り替えたら何が起こるだろうか？

このような取り替えは好みの問題ではなく，タイヒュミュラー空間の大域的な記述のために必要不可欠である．タイヒュミュラー空間は多様体であるので，一つの座標系でモジュライ空間の全てが覆える訳ではない．三角形分割を一つ定めるとタイヒュミュラー空間の座標近傍が一つ定まり，異なる座標近傍の関係を議論するには三角形分割を取り替えなければならないのだ．

ここで一つ便利な事実がある：2 次元面の任意の理想三角形分割は**フリップ (flip)**[*7] と呼ばれる図 8.6 の操作（理想四角形の対角線を取り替える操作）を有限回繰り返すことで移り変わることが知られている[171, Prio 4.5]．

フリップはある辺を指定したときに行うことができる．この辺を含む三角形は二つ存在し，合わせて四角形をなす．フリップは対角線を取り除いて別の対角線を足す操作である（図 8.6）．

フリップは図 8.7 に示されたペンタゴン関係式を満たす．T_{ij} を隣り合う面 i と j についてのフリップを表すとしたときに

$$T_{12}T_{13}T_{23} = T_{23}T_{12} \tag{8.13}$$

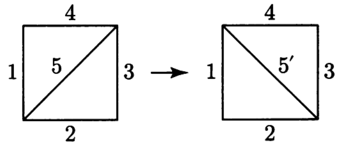


図 8.6　辺 e でのフリップは，理想四角形の対角線 e を別の対角線 e' に取り替える．

---

*7)　これは二つの三角形を別の二つの三角形に移すので **2–2 ムーブ**（**2-2 move**）とも呼ばれる．またホワイトヘッド・ムーブ（**Whitehead move**）とも呼ばれる．

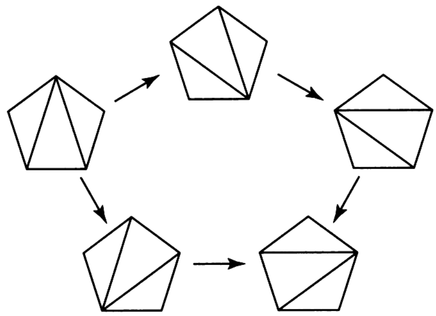


図 8.7 ペンタゴン関係式．辺にラベルを付けたときには，フリップの後にラベルの取り換えが必要である（付録 C の図 C.5 も参照）．

となる[*8)]．

さて，議論を座標に戻すことにすると，フリップを行ったときのフォック座標（$z_i = e^{Z_i}$）の変換則は

$$\begin{aligned} &z_1' = z_1(1+z_5)\ , \quad z_2' = z_2(1+z_5^{-1})^{-1}\ , \\ &z_3' = z_3(1+z_5)\ , \quad z_4' = z_4(1+z_5^{-1})^{-1}\ , \\ &z_5' = z_5^{-1} \end{aligned} \tag{8.14}$$

で与えられることが知られている．

この座標変換がシンプレクティック構造 (8.11) と両立することはすぐに確認できる．また，フリップが (1) 2 回で元に戻ること (2) ペンタゴンで元に戻ることを直接確認できる（演習問題 8.6）．

変換則 (8.14) を導出するには，ここまでの抽象的な座標としての定義では不十分である．付録 C では，これを BPS 箙のミューテーションの具体例として解釈できることを説明する．

より一般に，変換則 (8.14) は付録 C で述べる**クラスター y 変数**（**cluster y-variable**）に対する**クラスター変換**（**cluster transformation**）の一例であり，量子タイヒュミュラー理論はクラスター理論の一般論の枠組みできれいに理解できる．

ここではより直接的な幾何的な考察によって変換則 (8.14) を導出しておこう．そのために，まずタイヒュミュラー空間に**ペナー座標**（**Penner coordinate**）（**ラムダ距離**（**λ-distance**）とも呼ばれる）を導入しよう．

理想三角形分割の辺 i は二つのパンクチャーを結ぶ測地線である．ここで，測地線というのはタイヒュミュラー空間の点から定まる計量のもとでの測地線という意味である．その測地線の長さを L_i としよう．基本的な主張は，この変数の組 $\{L_i\}_{i\in E}$ がタイヒュミュラー空間の座標を与えるということである．

*8) なお，(8.13) を満たす可逆な操作 T_{ij} はトレミー・グルーポイド (**Ptolemy groupoid**) と呼ばれる．ちなみに，グルーポイドとは，全ての射が可逆である圏のことである．

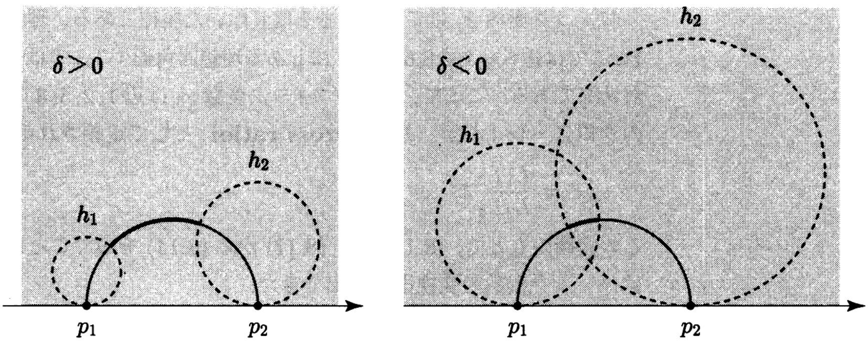


図 8.8 $\mathbb{H}^2$ の 2 点 p_1, p_2 をつなぐ測地線の長さは発散する．これを正則化するために，ホロサイクルと呼ばれる円 h_1, h_2 を考え（図の点線），それら二つの円の外にある部分の長さを測ることにする（左）．円の外にある部分がない場合には，二つの円の重なり部分の長さにマイナス符号を付ける（右）．こうして得られた符号付き長さ δ からペナー座標が $L = e^{\delta/2}$ により定義される．

但し，ここまでの記述には一つ問題がある．理想三角形の頂点は全て $\mathbb{H}^2$ の境界にあるので，この素朴な定義では L_i は全て発散してしまうのである：計量 (8.3) は $y = 0$ で発散しており，長さは対数型の発散を持つ．

そこで，次のような正則化を考えることにしよう（図 8.8）．理想三角形分割の辺 i の端点 p_1, p_2 を考え，各々についてホロサイクル h_1, h_2 を考える．但し，$\mathbb{H}^2$ の境界上の点に対する**ホロサイクル**（**horocycle**）とは，その点を通り $\partial\mathbb{H}^2$ に接する円のことである（無限遠点では水平な直線と定義する）．

p_1 と p_2 を結ぶ測地線を考え，そのうち二つのホロサイクル h_1, h_2 との交点の間の部分の長さを量 δ_i の絶対値 $|\delta_i|$ としよう．さらに h_1, h_2 が交わらないとき $\delta_i > 0$，h_1, h_2 が交わるとき $\delta_i < 0$ と定義することで δ_i の符号を定め，δ_i とする．ここでペナー座標を $L_i := e^{\delta_i/2}$ により定義する．実際には h_1, h_2 を十分小さく取れば $\delta_i > 0$ とできるが，$\delta_i < 0$ も許しておくと便利なことが多い．

既に述べたとおり，任意の二つの理想三角形分割はフリップで移り変わる．ペナー座標は，辺のラベルを図 8.6 のように選んだ時に，フリップのもとで，

$$L_5' = \frac{L_1 L_3 + L_2 L_4}{L_5} \tag{8.15}$$

と変化する（演習問題 8.4）．これは初等幾何でおなじみのトレミーの定理の双曲幾何版（を正則化したもの）であると解釈できる．

フォック座標の時と同様に，フリップが (1) 2 回で元に戻ること (2) ペンタゴンで元に戻ることを直接確認できる（演習問題 8.6）．

ここまで正則化により有限の量を得たが，まだ残っている問題として，この正則化には曖昧さが存在することがある．実際，パンクチャー $v \in V$ の周りでホロサイクルの長さを変えると，L_i は辺 i が頂点 v を含むとき定数倍され，v を含まないとき変更を受けない：

$$L_i \to c_v L_i \quad (v \in i)\ , \qquad L_i \to L_i \quad (v \notin i)\ . \tag{8.16}$$

これがペナー座標の難点である．

フォック座標 Z_i はこの曖昧さを取り除いた座標である．理想三角形分割の任意の辺（ここでは辺 5）は図 8.6 のようにとある理想四角形（ここでは辺 1, 2, 3, 4 からなる）の対角線である．ここで，辺 5 のフォック変数 z_5 は辺 1, 2, 3, 4 のペナー座標 $L_1, \ldots, L_4$ の**クロス・レイショ**（**複比，cross ratio**）として定義される：

$$z_5 := \frac{L_1 L_3}{L_2 L_4} \, . \tag{8.17}$$

この定義のもとで，(8.15) 及び (8.17) から (8.14) を導くことができる．こうして我々はフォック変数の変換則を導出できた．

8.2 量子タイヒュミュラー理論

8.2.1 量子化の手続き

さて，次にタイヒュミュラー理論の量子化を考えよう．この量子化は，通常の量子力学における量子化の手続きに慣れた読者に取っては実はとても簡単である：ポアソン括弧はフォック座標に対しては単純な形 (8.11) をしていたので，それを演算子に対する正準交換関係に置き換えればよいのである．つまり，フォック座標 Z_i は演算子 $\hat{Z}_i$ に置き換わり，その交換関係は「プランク定数」を $\hbar$ と書くことにすると

$$\left[\hat{Z}_i, \hat{Z}_j\right] = -2i\hbar\, Q_{i,j} \, . \tag{8.18}$$

ここで -2 を付けたのは後の便宜のためである．あるいは，$\hat{z}_i := e^{\hat{Z}_\gamma}$ で定義される変数を用いることにすると，

$$\hat{z}_j \hat{z}_i = q^{2Q_{i,j}} \hat{z}_i \hat{z}_j \, . \tag{8.19}$$

但し，$q := e^{i\hbar}$ であり，古典極限は $q \to 1$ となる．我々の目的の為には $\hat{z}_i$ の偏角の modulo 2π の情報も重要なのでより直接的に重要なのは (8.18) の方である．

(8.18) において $\hat{Z}_i$ の適当な線形結合を取れば正準交換関係

$$[\hat{X}_a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_{a,b} \, , \quad [\hat{X}_a, \hat{C}_\alpha] = [\hat{P}_a, \hat{C}_\alpha] = 0 \tag{8.20}$$

を満たす組 $\{\hat{X}_a, \hat{P}_a, \hat{C}_\alpha\}$ を得ることができる（演習問題 8.7 参照）．これは何の変哲もない単純な有限次元量子力学系であり，これを量子化するのは容易である．具体的には X_a を座標，P_b をその共役運動量（X_a での微分）として表現される L^2-ノルムの関数のなすヒルベルト空間を考えればよい．このとき，$\hat{C}_\alpha$ は定数であり，系の保存量を表す．こうして得られたのが**量子タイヒュミュラー理論**（**quantum Teichmüller theory**）である（原論文は [172]）[*9)]．

なお，より見通しを良くするためには，$\hat{Z}_i$ 及び $\hat{z}_i$ を線形に拡張しておくと便

*9) 一般に，量子力学系において X_a, P_b の一般の多項式を量子化することは不可能である（Groenwold-van Hove theorem）ので注意が必要である．

利である．つまり，基底 γ_i により $\gamma = \sum_i n_i\gamma_i$ という格子の元（チャージ）を考え，$\hat{Z}_{n_1\gamma_1+n_2\gamma_2} := n_1\hat{Z}_{\gamma_1} + n_2\hat{Z}_{\gamma_2}, \hat{Z}_{\gamma_i} := \hat{Z}_i$ とするのである．このとき，二つの元 $\gamma = \sum_i m_i\gamma_i, \gamma' = \sum_i n_i\gamma_i$ のペアリング（ディラックペアリング）を

$$\langle \gamma, \gamma' \rangle := \sum_{i,j} m_i n_j Q_{i,j} \tag{8.21}$$

により定義すると，(8.18) 及び (8.19) は

$$\left[\hat{Z}_\gamma, \hat{Z}_{\gamma'}\right] = -2i\hbar \langle \gamma, \gamma' \rangle \tag{8.22}$$

及び

$$\mathcal{A}_Q : \hat{z}_{\gamma'}\hat{z}_\gamma = q^{2\langle \gamma, \gamma' \rangle}\hat{z}_\gamma\hat{z}_\gamma \tag{8.23}$$

となる．後者で（Q から）定義される代数（を必要に応じて適宜完備化したもの）を**量子トーラス**（**quantum torus**）と呼び，以下では $\mathcal{A}_Q$ と書く．

8.2.2 量子化の物理的意味

さて，ここまでの「量子化」の意味をより物理的に考察してみよう．第 6 章で議論したように，我々は 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論を S^1 にコンパクト化した設定を考えてきた（(6.15) 参照）．ここで，厳密に 3 次元を考えるのではなく，この S^1 の半径 R を有限に保った時は何が起こるだろうか？

第 6 章の議論を思い出すと，この半径 R は 5 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論を 6 次元 $(0,2)$ 理論に持ち上げる際の 6 次元方向の S^1 の半径であり，超弦理論の言葉では，これは IIA 型超弦理論の 5 次元のブレーン（D4 ブレーン）が M 理論の 6 次元のブレーン（M5 ブレーン）へ持ち上がる際の M 理論方向の半径なのであった．

このとき，3 次元での粒子は 4 次元のループ演算子に持ち上がる．我々は 4 次元時空 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ を考えていたが，S^1 方向に回った時に $\mathbb{R}^3$ の回転群の部分群 $U(1) \subset SO(3)_{回転}$ によるねじりを加えた時空を考えることで超対称性を保つことができる：この $U(1)$ が $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 平面の回転だとすると時空は $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \times S^1)_q$ となる．このときのねじりのパラメーターが量子化のパラメーター q であり，それは $SO(3)$ スピンの第 3 成分 J_3 の値をカウントしている．

これまでの説明では，フォック座標は赤外ループ演算子の期待値として理解されたのであった．J_3 による回転対称性と両立するために，ループ演算子は $\mathbb{R}^2$ の原点に置かれなければならないが，残りの $\mathbb{R}$ の方向にはどこに存在してもよい．

さて，二つのループ演算子が存在したとしよう．このとき，二つのループ演算子のチャージは，電荷と磁荷が同時に存在するならばディラック量子化条件

なお，本書では用いないが，量子タイヒュミュラー理論の構成には，カシャエフ（Kashaev）による別の流儀[173]もある．両者の量子化の方法は異なっており，例えばカシャエフ流の量子化では理想四面体分割の面（辺ではなく）に付随した変数が現れる．

を満たしていなければならない．先の構成で，γ はループ演算子のチャージを表しており，そのペアリング (8.21) が整数であることはその量子化条件に他ならない．ゼロでないディラックペアリングを持つ（このことを互いに局所的でない（mutually non-local）という）とき，二つのループ演算子から $\mathbb{R}$ に沿ってポインティング・ベクトル $\mathbf{J} \sim \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ が生成され，その大きさは $|\langle\gamma, \gamma'\rangle|$ で与えられる．二つのループ演算子の位置を変えると，J_3 の値は符号を変えるので二つのループ演算子は q のファクターの分だけ交換しないことになる．こうしてフォック演算子の量子化 $\hat{Z}_\gamma$ の交換関係 (8.23) が理解できた[170]*10)．

8.2.3 具体例

本節を終える前に一つ具体例を与えよう．図 8.5 の 4 点球面を考えると，

$$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}\ , \quad \{1, 5, 6\}\ , \quad \{2, 6, 4\}\ , \quad \{5, 3, 4\}$$

に対して各々

$$[\hat{Z}_a, \hat{Z}_b] = [\hat{Z}_b, \hat{Z}_c] = [\hat{Z}_c, \hat{Z}_a] = -2i\hbar\ . \tag{8.24}$$

次の 4 つの組み合わせは他の全てと交換する：

$$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_6\ , \quad \hat{Z}_1 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_5\ , \quad \hat{Z}_4 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3\ , \quad \hat{Z}_4 + \hat{Z}_5 + \hat{Z}_6\ . \tag{8.25}$$

残りは 2 次元分あり，基底として例えば $\hat{Z}_1$ と $\hat{Z}_2$ を選ぶと，

$$[\hat{Z}_1, \hat{Z}_2] = -2i\hbar \tag{8.26}$$

となりこれは 1 自由度量子力学系に他ならない．

フリップ（図 8.6）によるフォック変数の変化 (8.14) も量子化する必要がある．この際もフォック座標を演算子で置き換えればよいが，演算子は交換しないので演算子の順序に曖昧さが残る．しかし，重要なのはそうして定義された操作が交換関係 (8.18) と両立することである．この条件を満たす変換は次の通りである（演習問題 8.7）：

$$\begin{aligned} &\hat{z}_1 \to \hat{z}_1(1 + q\,\hat{z}_5)\ , \quad \hat{z}_2 \to \hat{z}_2(1 + q^{-1}\hat{z}_5^{-1})^{-1}\ , \\ &\hat{z}_3 \to \hat{z}_3(1 + q\,\hat{z}_5)\ , \quad \hat{z}_4 \to \hat{z}_4(1 + q^{-1}\hat{z}_5^{-1})^{-1}\ , \quad \hat{z}_5 \to \hat{z}_5^{-1}\ . \end{aligned} \tag{8.27}$$

これが古典極限 $q \to 1$ において (8.14) に戻ることは容易に確認できる．

既に述べたように，フリップは交換関係 (8.18) を変えるので (8.27) は異なる量子トーラス代数 $\mathcal{A}_{前}, \mathcal{A}_{後}$ の間の写像である．この変換を，次の二つの変換の

*10) もっとも，正確にはヒッチン・モジュライの幾何学的な意味での量子化と，角運動量を数える意味での「量子化」とが正確に一致するかどうかは最終的には（少なくともラグランジアンが知られている場の理論については）場の理論での直接計算によって確かめられるべきものである．この方向については例えば [174] を参照．

合成に分解しておくとその意味が分かりやすい：まず，一つの変換は $\mathcal{A}_{前}$ から $\mathcal{A}_{後}$ への変換で

$$
\begin{aligned}
&\hat{z}_1 \to \hat{z}_1 \ , \quad \hat{z}_2 \to q\hat{z}_2\hat{z}_5 \ , \\
&\hat{z}_3 \to \hat{z}_3 \ , \quad \hat{z}_4 \to q\hat{z}_4\hat{z}_5 \ , \qquad \hat{z}_5 \to \hat{z}_5^{-1} \ ,
\end{aligned}
\tag{8.28}
$$

先に第 8.2.1 節で導入した記号 $\hat{Z}_\gamma$ を用いると，(8.28) 式は

$$
\begin{aligned}
&\hat{Z}_{\gamma_1} \to \hat{Z}_{\gamma_1} \ , \quad \hat{Z}_{\gamma_2} \to \hat{Z}_{\gamma_2+\gamma_5} \ , \\
&\hat{Z}_{\gamma_3} \to \hat{Z}_{\gamma_3} \ , \quad \hat{Z}_{\gamma_4} \to \hat{Z}_{\gamma_4+\gamma_5} \ , \qquad \hat{Z}_{\gamma_5} \to \hat{Z}_{-\gamma_5}
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

となり，これは γ に対するとある線形変換（基底の取り替え）に他ならない．付録の第 C.1.1 節で議論するように，これは 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論でのチャージの基底の線形変換であり，3 次元場の理論と 4 次元場の理論とのカップルの仕方を変える操作である．

次なる変換は $\mathcal{A}_{後}$ からそれ自身への写像であり，（既に第 4 章で出会った関数である）量子ダイログ関数 $e_b(x)$ による共役である：

$$
\hat{z}_i \to e_b\left(\frac{\hat{Z}_5}{2\pi b}\right)^{-1} \hat{z}_i \, e_b\left(\frac{\hat{Z}_5}{2\pi b}\right) \ , \quad i = 1, \cdots, 5 \ . \tag{8.30}
$$

但し，パラメーター b を

$$
\hbar = \pi b^2 \tag{8.31}
$$

により定義した．次章で見るように，これは境界に存在する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を変える操作として解釈できる．付録 C ではこの分解についてより一般的な状況でコメントする．このように，フリップ一つごとに量子ダイログ関数が一つ現れることは重要である．

2 次元面上でその写像類群 φ の元を考えると，その理想三角形分割への効果は既に述べたようにフリップの列で表現されていた．各フリップは量子ダイログ関数の演算子で表されていたから，写像類群に対応する演算子 $\hat{\varphi}$ は結局量子ダイログ関数の積で表現されることになる．

本章では我々は量子タイヒュミュラー理論を有限次元量子力学の問題として理解した．次章ではそれを 3 次元幾何の言葉に読み替える．

8.3 補足：リウビユ理論との関係

本節では（量子）リウビユ理論と（量子）タイヒュミュラー空間との等価性を説明しよう．これは本章及び次章の理解の為に必須ではないが，第 6.3.3 節と本章との関係を理解するために必須である他，AGT 関係式との関係も明確にする．なお，第 6 章の表 6.1 も参考にされたい．

まず古典論の範疇で両者の関係を理解するには，リウビユ理論のラグランジアン (6.25) から運動方程式を導いてみよう：

$$\partial\bar{\partial}\phi = 2\pi\mu b e^{2b\phi}. \tag{8.32}$$

これは**リウビユ方程式**（**Liouville equation**）であるが，それは計量

$$ds^2 = e^{2b\phi}dzd\bar{z} \tag{8.33}$$

が負正定値の定数曲率を持つ条件と同じである．**一意化定理**（**uniformization theorem**）は，任意のタイヒュミュラー空間の点において (8.32) の形の解が一意に存在することを主張する．こうしてタイヒュミュラー空間の点と (8.32) の解の間に対応関係が付けられた．そもそも，リウビユ方程式は歴史的に一意化定理の研究から生まれてきたのであった．

古典系として一致してもその量子化が一致するかどうかは明らかではない．タイヒュミュラー理論の量子化とリウビユ理論としての量子化が一致することは 80 年代にフェアリンデ (H. Verlinde) によって予想され[124]，より最近 [175]～[177] によって殆ど証明が付けられた（離散リウビユの文脈では [178] も参照）．起源を同じにする二つの理論は，こうして長年の時を経て量子の世界で再度出逢うことになったのである．

この理論は現時点で数学的に厳密ではないし，その詳細を説明することはここではできないが，基本的なアイデアは，量子タイヒュミュラー理論の中で量子リウビユ理論の共形ブロックを構成すればよいというものである．より具体的には，共形ブロックは量子タイヒュミュラー空間の正則基底 $|\mathcal{F}(q)\rangle$ と，長さの基底 $|l\rangle = |\alpha\rangle = |\alpha, E\rangle$ の重ね合わせで与えられるというのが鍵となる主張である：

$$\mathcal{F}_{\alpha,E}(q) = \langle \alpha, E|\mathcal{F}(q)\rangle\ . \tag{8.34}$$

この式は既に第 6.3.3 節で仮定してしまったが，ここで説明を加えよう．まず，一つの基底（正則基底）$|\mathcal{F}(q)\rangle$ は，Σ の複素構造をパラメーター付けする正則座標であり，タイヒュミュラー空間を正則座標 q で表し量子化することで得られる．

もう一つの基底は長さ基底 $|\alpha\rangle = |l\rangle$ である．これはタイヒュミュラー空間を長さ・ツイスト座標（第 8.1.4 節）で書き量子化した時に自然に得られる基底であり，l は長さ・ツイスト座標のうちの長さ座標を表す．

リウビユ理論でのフェアリンデ (E. Verlinde) ループ演算子 (loop operator) はタイヒュミュラー理論でのループ演算子 $\mathcal{L}$ である[179]．このとき，基底 $|l\rangle$ はパンツ分解を定めた時に最大限可換なフェアリンデループ演算子の組についての同時固有状態であり，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ の完全系となる[180]：

$$\langle l|l'\rangle = \nu(l)^{-1}\delta(l-l')\ , \quad \int_{l>0} dl\,\nu(l)\,|l\rangle\langle l| = 1\ . \tag{8.35}$$

ここで $\nu(l)$ は (6.26) の積分測度 $\nu(\alpha)$ と同じである．リウビユ運動量 α は長さのパラメーター l に，また外線運動量 E はパンクチャーでのホロノミー m に同一視される[124], [181]．

(8.34) を示す大雑把な方針は，両辺が写像類群の作用のもとで同じ変換性を示すこと，また同じ漸近的振る舞いを示すことを確認することである．なお，同様の手法を用いた AGT の証明も試みられている[177]．

演習問題

8.1 [♦]（対称空間としての $\mathbb{H}^2$）リー群 G とその部分リー群 H に対し，その商（コセット，coset）として定まる均質空間（homogeneous space）G/H は G の計量から誘導される自然な計量を持つ．$G = PSL(2,\mathbb{R}), H = SO(2)$ の時に，こうして得られた計量が $\mathbb{H}^2$ の計量 (8.3) と一致することを確かめよ．

8.2 [♦]（$\mathbb{H}^2$ の測地線）$\mathbb{H}^2$ における測地線が軸 $y=0$ に垂直な半円及び垂直な直線であることを示せ（図 8.1）．（ヒント：グラフの $y=y(x)$ の長さを計算し，それを $y(x)$ について変分して得られるオイラー＝ラグランジュ方程式を解け．）

8.3 [♦]（$\mathbb{H}^2$ における双曲距離の公式）

$\mathbb{H}^2$ の 2 点をその虚部が正である複素数 z,w で表そう．このとき，計量 (8.3) のもとでの z,w の間の双曲距離は

$$d(z,w) = \log\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|} \tag{8.36}$$

で与えられることを示せ．なお，この式は

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\frac{d(z,w)}{2}\right) &= \frac{|z-w|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}\ ,\\
\cosh\left(\frac{d(z,w)}{2}\right) &= \frac{|z-\overline{w}|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}\ ,\\
\lambda(z,w) := \exp\left(\frac{d(z,w)}{2}\right) &= \frac{|z-w|+|z-\overline{w}|}{2\sqrt{\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}}
\end{aligned} \tag{8.37}$$

などと書き直すこともできる．

（ヒント：まず (8.36) がメビウス変換のもとで不変であることを示せ．次に，適当なメビウス変換によって z,w を純虚数に移せることを示す．このとき z,w の間の測地線は虚軸の z,w の間の部分であり，$z=ip, w=iq$ と書くとその距離は直ちに

$$d(ip,iq) = \left|\log\left(\frac{p}{q}\right)\right| \tag{8.38}$$

と計算できる．これは (8.36) と一致する．）

8.4 [♦]（**一般化されたトレミーの定理（generalized Ptolemy's theorem）**）

ペナー座標 L_i を本文中のようにホロサイクルを使って正則化により定義したとき，トレミーの定理 (8.15) が成り立つことを証明せよ．

ペナーの論文[182, Proposition 2.6]にも証明が記されているが，そこでは $\mathbb{H}^2$ の 3 次元ミンコフスキー空間での実現が用いられており，本章で用いた上半平面の座標に書き

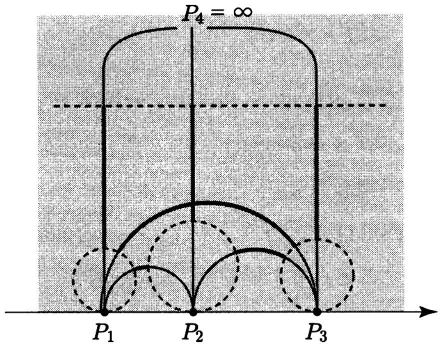


図 8.9　一般化されたトレミーの定理の設定（演習問題 8.4）.

直すのは多少煩雑である.

ここではむしろ上半平面模型で直接の計算によって (8.15) を示そう．基本的には高々 2 次元の空間の計算であるので測地線やホロサイクルを全て具体的に書けばよい.

(a)　計算の効率を上げるため，メビウス変換によって $\partial\mathbb{H}^2$ の 4 点を $P_1 = t_1, P_2 = t_2, P_3 = t_3$ 及び無限遠点 $P_4 = \infty$ に移そう（図 8.9 参照）．ここで $t_{1,2,3}$ は $t_1 < t_2 < t_3$ を満たす実数である.

(b)　2 点をつなぐ測地線は容易に求めることができる．例えば P_1 と P_4 の時は直線 $\{z|\,\mathrm{Re}(z) = t_1\}$，$P_1$ と P_2 の時は半円

$$\left(x - \frac{t_1 + t_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right)^2 \tag{8.39}$$

である.

$P_{1,2,3}$ でのホロサイクルを

$$(x - t_i)^2 + \left(y - \frac{a_i^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_i^2}{2}\right)^2 , \quad (i = 1, 2, 3) , \tag{8.40}$$

また P_4 でのホロサイクルを $\{z|\,\mathrm{Im}(z) = a_4^{-2}\}$ と取ろう．但し $a_{1,2,3,4} > 0$ である.

(c)　公式 (8.38) を用いることでペナー座標が計算できる．P_i と P_j をつなぐ辺のペナー座標を L_{ij} と書くことにすると，その結果は

$$\begin{aligned} L_{14} &= \frac{1}{a_1 a_4} , \quad L_{24} = \frac{1}{a_2 a_4} , \quad L_{34} = \frac{1}{a_3 a_4} , \\ L_{12} &= \frac{t_2 - t_1}{a_1 a_2} , \quad L_{23} = \frac{t_3 - t_2}{a_2 a_3} , \quad L_{13} = \frac{t_3 - t_1}{a_1 a_3} . \end{aligned} \tag{8.41}$$

であることを示せ．但し L の定義には符号付き距離が使われたことを思い出しておこう.

(d)　最後に (8.41) から t_i を消去して一般化されたトレミーの定理

$$L_{12} L_{34} + L_{23} L_{14} = L_{13} L_{24} \tag{8.42}$$

を得る.

8.5　（双曲幾何と平面幾何の類似）[♦] 平面幾何についての定理を二つ考え，それを適宜修正したものが双曲幾何でも成立するかを考えよ．例えば，メネラウス（Menelaus）の定理やチェバ（Ceva）の定理はどうか？

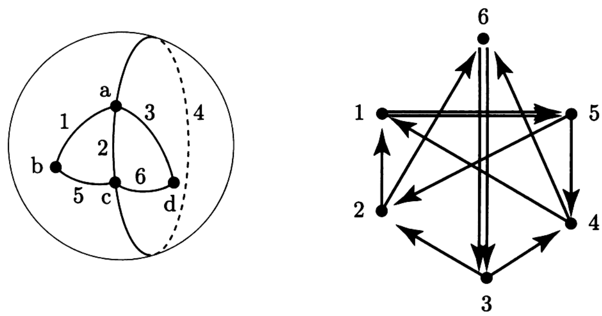


図 8.10　4 点球面の三角形分割から与えられる箙の例．図 8.5 とはフリップで関係しており，従って，その量子化されたフォック変数 $\hat{z}_i$ は (8.27) で関係付いている．

8.6　(フォック・ペナー座標の変換則) [♦] 古典タイヒュミュラー理論において，フォック座標とペナー座標の変換則 (8.14)，(8.15) がシンプレクティック形式 (8.11) と両立することを確かめよ．また，これらの座標が (1) 2 回のフリップ (2) ペンタゴンムーブのそれぞれで保たれることを具体的な計算によって確認せよ．但し，ペンタゴンムーブの後には辺のラベルを取り替えないと元に戻らないことに注意されたい．

8.7　[♦] (量子フォック座標の変換則) 量子フォック座標のフリップの式 (8.27) が交換関係と両立することを確かめよ．また，量子フォック座標が (1) 2 回のフリップ (2) ペンタゴンムーブのそれぞれで保たれることを具体的な計算によって確認せよ．

8.8　[♦] (4 点球面の例) 4 点球面の理想三角形分割として，図 8.5 とは異なる図 8.10 を採用した量子タイヒュミュラー空間の交換関係を書き下し，適当に変数を取り替えることによって (8.20) の形の交換関係が得られることを示せ．5 点球面の場合にも適当な理想三角形を選び，同様の問題を解け．

第 9 章
四面体分割と3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論

この章ではこれまでの議論を総合して 3 次元超対称場の理論と 3 次元ゲージ理論との関係を整理し，3 次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間とその量子化を議論する．幾何的な $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続は 3 次元多様体の幾何学，特に双曲幾何で記述され，その量子化を与えるのが複素チャーン＝サイモンズ理論である．

9.1　2 次元の変化としての 3 次元

前章では 2 次元多様体上の平坦接続を議論した．本章では，そこで学んだことを生かして 3 次元多様体の幾何を理解し，それが 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論にどのような対応物を持つかを調べよう．

基本的な考え方は至ってシンプルである．3 次元チャーン＝サイモンズ理論を理解するには，（ハミルトン形式を取ることにすると）その状態と，その時間発展を理解すればよい．これは，2 次元面上の理論のヒルベルト空間の状態と，その「時間発展」を理解することに対応するが，まさにそれは第 6.1.2 節及び前章で議論したことであった．ここで「時間発展」と書いたのは写像類群の作用である．このとき，写像類群は一つの理想三角形分割を別の理想三角形分割に送るが，それはより具体的には 2 次元面の理想三角形分割のフリップの列から生成された．

これを 3 次元に読み替えてみよう．図 9.1 にあるように，2 次元面でのフリップは 3 次元的には四面体を貼り合わせる操作に対応する．四面体を押しつぶせば裏と表にそれぞれ四角形が現れるという訳だ．四面体はふっくらとした四角のクッションであって，その裏と表にそれぞれ逆の対角線が引かれていると思うと想像しやすい．

2 次元面の理想三角形の頂点は $\mathbb{H}^2$ の境界に存在したので，四面体の頂点も同様の筈である．従って，3 次元の四面体も境界に頂点を持つ四面体，理想四

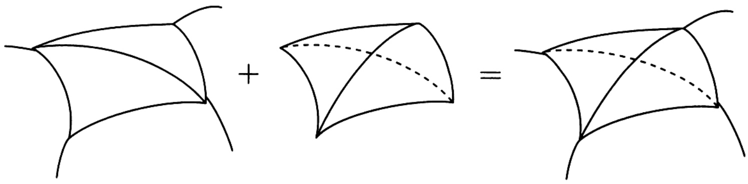


図 9.1 (3 次元) 四面体の (2 次元) 三角形分割への貼付け．このとき 2 次元のとある四角形の対角線が別の対角線に取って代わられ（フリップ），結果三角形分割は別の三角形分割に変わる．これは 3 次元的にみると，一つの理想四面体を足し合わせることに対応するのである．

面体になると期待できる[*1]．これをまとめると，

$$\text{2 次元面のフリップ} \longleftrightarrow \text{3 次元理想四面体} . \tag{9.1}$$

上の記述では写像類群の作用をフリップに分解したので，対応して 3 次元では複数の理想四面体を貼り合わせることになる．つまり，3 次元多様体 M の理想四面体分割を考えることになる：[*2]

$$M = \bigcup_i \Delta_i \ . \tag{9.2}$$

但しここで Δ_i は理想四面体である．

既に第 8 章で見たように，フリップによる分解の仕方は一意ではない．その曖昧さは，ペンタゴンで本質的に尽くされていたのでそれを 3 次元に読み替えればよい．図 9.2 にあるように，ペンタゴンは二つの四面体を三つの四面体に分割し直す操作に読み替えられる．このような操作は 3 次元多様体では**パヒナームーブ (Pachner move)** (あるいは **2–3 ムーブ (2–3 move)**, **2–3 パヒナームーブ (2–3 Pachner move)**) と呼ばれる．つまり，まとめると，

$$\begin{aligned}&\text{2 次元面でのペンタゴン}\\ &\qquad \longleftrightarrow \text{3 次元理想多面体分割の 2–3 パヒナームーブ} .\end{aligned} \tag{9.3}$$

ここまでの対応関係をさらに推し進めると，2 次元面でのタイヒュミュラー空間（及びその量子化）の座標そのものも 3 次元的対応物を持つことが期待される．2 次元では座標は理想三角形分割の辺に対して定まったので，3 次元でも理想四角形分割の辺ごとに座標が定まるべきであり，それは 2 次元の時と同様の性質を満たすことが期待される．さらに，一度この理解にたどり着いてし

---

*1) ここではまだ理想四面体での計量・双曲構造を考慮に入れていないが，それについてはすぐ後で議論する．

*2) 3 次元多様体を四面体により分割するという考えは，3 次元の量子重力の文脈で考えられてきた．しかしその場合はしばしばどんどん細かい四面体分割を考えるが，ここでは状況は異なる．関連して，我々は理想四面体を考えており頂点は常に $\mathbb{H}^3$ の境界にあるので，四面体の内部に新しい頂点を付け加える操作（1–4 move とも呼ばれる）を考える必要はない．

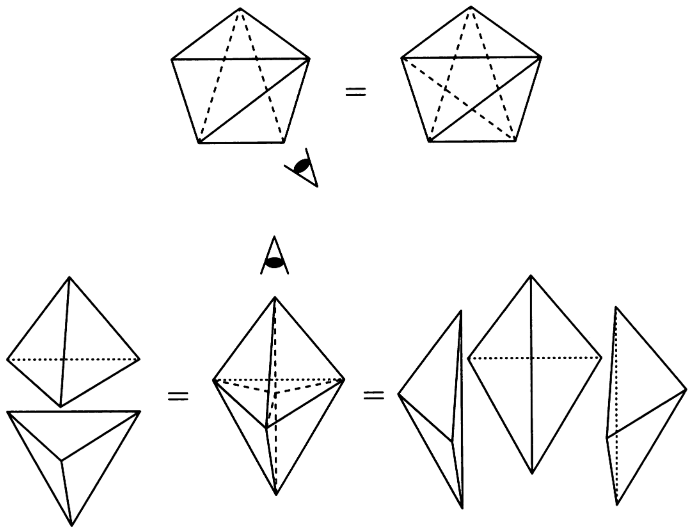


図 9.2　2 次元リーマン面でのペンタゴン（図 8.7）を立体視すると，3 次元での理想四面体に対する 2–3 パヒナームーブが得られる．

まえば，2 次元面の時間変化として捉えられない，より一般の 3 次元多様体に対しても同様の構成を実行できる筈である．実際その期待は正しいことが分かる，以下ではこれを説明していこう．

ここまでの議論のうち，トポロジカルな三角形や多面体の貼り合わせに関する部分はより一般の d 次元双曲幾何と $(d+1)$ 次元双曲幾何に対応物を持つ．しかし，一度その計量や双曲構造を議論しだすとその関係はより複雑である．2 次元と 3 次元の間の対応がうまく定まるのは，部分的には，2 次元双曲多様体 $\mathbb{H}^2$ のアイソメトリー $PSL(2,\mathbb{R})$ と 3 次元双曲多様体 $\mathbb{H}^3$ のアイソメトリー $PSL(2,\mathbb{C})$ について，前者は後者の実スライスであるという特殊事情に起因するものである（第 8 章の脚注 1 も参照）．

9.2　理想正四面体と 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論

9.2.1　理想正四面体

さて，まず理想四面体を考えることにしよう．これは第 8 章で説明した理想三角形の自然な高次元化であり，$\mathbb{H}^3$ の中の四面体でその全ての頂点が $\mathbb{H}^3$ の境界 $\partial\mathbb{H}^3$ にあるものである（図 9.3）．既に第 7 章で述べたように，$\mathbb{H}^3$ にはメビウス変換のアイソメトリーが存在するのでそれを使うことで正四面体の頂点を $0, 1, z$ 及び無限遠方（∞）に持って行くことができる．この複素数パラメーター z は理想正四面体の**モジュラス（modulus）**と呼ばれる．

四面体の 4 つの頂点のうち三つのそれぞれを $0, 1, \infty$，残りを z に固定するとメビウス変換 $PSL(2,\mathbb{C})$ の自由度は完全に固定される．しかし三つの頂点の内どれをそれぞれ $0, 1, \infty$ と同一視するかに関しては，三つを置換する $3! = 6$ 個

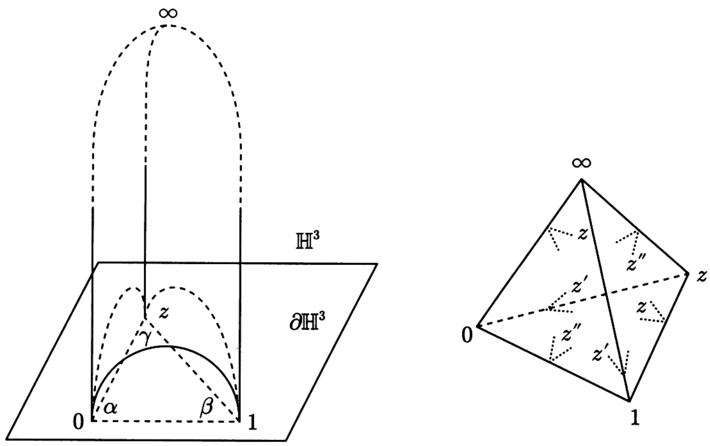


図 9.3　(左) 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の理想正四面体はその全ての頂点を $\mathbb{H}^3$ の境界に持ち，その頂点は $\{0,1,z,\infty\} \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と取ることができる．(右) 理想正四面体の三つのモジュラス z, z', z'' の図示.

の自由度がある．この内半分は四面体の向きを保ち，モジュラス z をそれぞれ

$$z\ , \quad z' := \frac{1}{1-z}\ , \quad z'' := 1 - z^{-1} \tag{9.4}$$

に送る (各々これを確認されたい)．z を z', z'' に取り換えても頂点のラベルを付け替えるだけなので実際の四面体は変わらない．また残りの 3 個の置換は四面体の向きを逆にし，モジュラスを

$$z^{-1}\ , \quad z'^{-1} = 1 - z\ , \quad z''^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{9.5}$$

に送る．三つの頂点のうちどれを z と看做すかは好みの問題であって，z, z', z'' をサイクリックに入れ替える自由度は残っていることに注意しよう．

変数 z, z', z'' は (9.4) から従う式

$$zz'z'' = -1 \tag{9.6}$$

を満たす．これは z, z', z'' の偏角の和が π であることを意味するが，これは $0, 1, z$ から定まる $\mathbb{C}$ の三角形の三つの角

$$\mathrm{Arg}(z)\ , \quad \mathrm{Arg}(z')\ , \quad \mathrm{Arg}(z'') \tag{9.7}$$

の内角の和が π であるに他ならない．より正確には，内角の和が例えば 3π ではなく π であることを明示するためには,

$$z =: e^{Z}\ , \quad z' =: e^{Z'}\ , \quad z'' =: e^{Z''} \tag{9.8}$$

として

$$Z + Z' + Z'' = i\pi \tag{9.9}$$

と書いた方がよい．

三つの角 (9.7) は $1, z, \infty$ から定まる $\mathbb{C}$ の三角形の三つの角でもある．つまり，四面体には 6 個の辺がありそのそれぞれは面角を持つが，モジュラス z を持つ理想正四面体に対しては，四面体の向かい合う側にある二つの面角は一致する（図 9.3 参照，直接の計算によってこのことを確認してみるとよい）．

9.2.2 理想正四面体の 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 対応物

さて，ここまでの幾何的な説明を前章での量子タイヒュミュラー理論と関係付けよう．

まず理想四面体の境界 $\Sigma_{0,4}$ を考えよう．既に見たように，このとき量子タイヒュミュラー理論では

$$[\hat{Z}, \hat{Z}'] = [\hat{Z}', \hat{Z}''] = [\hat{Z}'', \hat{Z}] = -2i\hbar = -2i\pi b^2 \tag{9.10}$$

を満たす $\hat{Z}, \hat{Z}', \hat{Z}''$ が存在し，その和 $\hat{Z}+\hat{Z}'+\hat{Z}''$ は全てと交換し定数と看做せた．そこで例えば $\hat{Z}$ を座標，$\hat{Z}'$ を運動量と思って量子化できる．

この $\hat{Z}, \hat{Z}', \hat{Z}''$ を (9.8) 及び (9.9) で導入された，四面体のモジュラスの量子化であると同定するのが自然である．

(9.1) 式に従い，理想正四面体にはフリップを対応させよう．前章 (8.30) でみたように，フリップには量子ダイログ関数の演算子 $e_b\left(\frac{\hat{Z}}{2\pi b}\right)$ が対応していた．これを理想多面体での波動関数（引数は z，あるいはその対数である Z）として解釈しよう．(8.30) は演算子に対するハイゼンベルク形式を取っていたので，波動関数に対するシュレーディンガー表示を取ると

$$\psi_{\text{理想四面体}}(Z) = e_b\left(\frac{Z}{2\pi b} + \frac{iQ}{2}\right) . \tag{9.11}$$

であると期待される．但し，後の都合のために Z を定数倍だけシフトしておいた．

この同一視が自然かどうか調べてみよう．付録の (B.28) 式より，

$$e_b\left(\frac{x-2\pi i b^2}{2\pi b} + \frac{iQ}{2}\right) = (1-e^x)\, e_b\left(\frac{x}{2\pi b} + \frac{iQ}{2}\right) \tag{9.12}$$

が成立することを思い出そう．これは，$\hat{z} = e^{\hat{Z}}, \hat{z}' = e^{\hat{Z}'}$ を用いて（交換関係 (9.10) により，$\hat{z}'$ は波動関数 $\psi(z)$ の引数 z を $2\pi i b^2$ だけシフトする差分作用素であることに注意）

$$\left(1-\hat{z}-\hat{z}'^{-1}\right)\psi_{\text{理想四面体}}(Z) = 0 \tag{9.13}$$

と書ける．つまり，これは (9.4) の z と z' の関係 $1-z-z'^{-1}=0$ を波動関数に作用する演算子として量子化したものであることが分かる．

ここまでたどり着いてしまえば，波動関数 (9.11) の情報から，対応する 3 次

元 $\mathcal{N}=2$ 理論を同定するのは容易である．まず，理想四面体に対応する理論 T_Δ は次の分配関数を持つべきである：

$$
\begin{aligned}
Z_{S_b^3}(T_\Delta) &= e_b\left(\frac{Z}{2\pi b}+\frac{iQ}{2}\right) \\
&= s_b\left(\frac{Z}{2\pi b}+\frac{iQ}{2}\right) e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{Z}{2\pi b}+\frac{iQ}{2}\right)^2+\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \ .
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

ここで $e_b(x)$ を $s_b(x)$ で置き換える式 (B.22) を用いた．パラメーターの同定は (4.26) の $\overline{\sigma}$ を用いて

$$
\frac{Z}{2\pi b}+\frac{iQ}{2} \leftrightarrow \overline{\sigma} \ , \quad Z_{S_b^3}(T_\Delta) = s_b(\overline{\sigma})\, e^{-\frac{i\pi}{2}\overline{\sigma}^2+\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \ . \tag{9.15}
$$

特に，$\overline{\sigma}=\frac{iQ}{2}(1-r)-\sigma$（(4.26) 参照）を用いると，

$$
\mathrm{Im}(Z) \leftrightarrow -i\pi bQr \ , \quad \mathrm{Re}(Z) \leftrightarrow -2\pi b\sigma \ . \tag{9.16}
$$

ここで σ が $2\pi b$ 倍されているのは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論から 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論への次元還元の立場からは自然である（第 4.4.4 参照）．

第 4 章での S^3 分配関数についての規則を用いると，T_Δ は相互作用を持たない $\mathcal{N}=2$ カイラル多重項 Φ であることが分かる[129]．$\overline{\sigma}=-\sigma_R-\sigma$ は R 対称性とフレーバー対称性の効果の両方を含んでいたので（(4.26) 参照），このカイラル多重項は $U(1)_F$ フレーバー対称性及び $U(1)$ R 対称性を持ち，場 Φ のチャージは

$$
\begin{array}{c|cc}
 & F & R \\
\hline
\Phi & +1 & 0
\end{array} \ . \tag{9.17}
$$

分配関数から (4.19) の規則に従って次のチャーン＝サイモンズ項のレベルが読み取れる：

$$
k_{\mathrm{bare}} = \left(\begin{array}{c|cc}
 & F & R \\
\hline
F & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
R & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right) \ . \tag{9.18}
$$

このチャーン＝サイモンズ・レベルの取り方は，パリティアノマリーからの制限（第 3.3.3 節及び (3.54) 参照）を満たすことに注意しよう．実際，パリティ・アノマリーによって量子的に $\Delta k_{FF}=\frac{1}{2}$ が生成されるが，それは $k_{\mathrm{bare},FF}=-\frac{1}{2}$ とキャンセルして合計のチャーン＝サイモンズレベルは整数となる．同様に，R 対称性を含むチャーン＝サイモンズ項についてもそのレベルは量子補正を取り入れると合計では整数であり，理論のフレーバー対称性や R 対称性は保たれる．フレーバー対称性が破れてもその理論自体が矛盾するわけではないが，実際にはすぐ後に見るようにそのフレーバー対称性をゲージ化することが不可欠であるのでここでの解析は重要である．

ここまでの議論では四面体のモジュラス z として一つの面角を固定してきた．それでは z を z', z'' に取り替えた時には波動関数は付録 B (B.64) の第 1 式より再度量子ダイログ関数 $e_b(x)$ で書かれる．これは，チャーン＝サイモンズ理論の側では $SL(2,\mathbb{Z}) = Sp(2,\mathbb{Z})$ 行列による偏極の取り替えと変数のシフトを合成した**アファイン・シンプレクティック群**（**affine symplectic group**）$ISp(2,\mathbb{Z})$ による作用である．3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の側では，これは 3 次元ミラー対称性の一種であると解釈できる[129]．

9.3 四面体の貼り合わせ

ここまでは一つの理想正四面体を考えてきたが，それでは複数の四面体を貼り合わせるとどうなるだろうか．

まず，古典的な幾何を使って考えることにしよう．モジュラス z は面角としての解釈を持つので，理想正四面体を貼り合わせるときには貼り合わせの条件を満たしていなければならない．まず，四面体の辺の周りで四面体が貼り合わさり，角度の和が 2π にならなければいけない（図 9.4）．これを自然に表すには

$$\sum_{i:\ \text{辺}} Z_i = 2\pi i\ , \quad \prod_{i:\ \text{辺}} z_i = 1 \tag{9.19}$$

とすればよい．これを**貼り合わせ条件**（**gluing condition**）と呼ぶことにする．(9.19) には，角度（すなわち Z の虚部）の和に対応する条件のみならず，Z の実部（**トーション**（**torsion**））に対応する条件も入っている．この条件が満たされていないとき，辺の周りに一周すると，角度は同じだが別の点に戻ってくる．このことを繰り返すと完備ではない点列を考えることができる．従って完備な双曲構造を考えたいならば実部に関する条件も満たされなければならない[146, Proposition 3.4.19]．

さて，この式は 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の言葉では何を意味するのだろうか？ Z_i

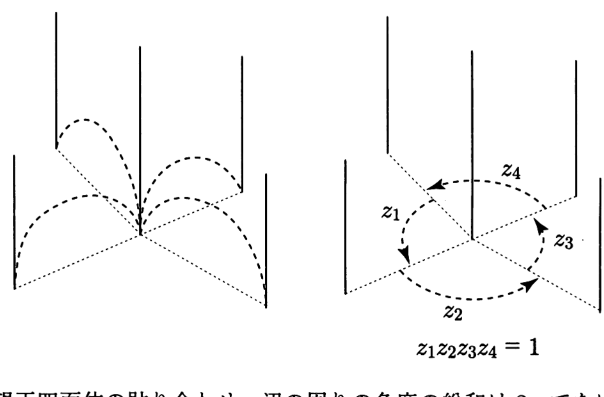


図 9.4　理想正四面体の貼り合わせ．辺の周りの角度の総和は 2π でなければいけない．完備双曲構造のためにはトーション（モジュラスの実部）の和もゼロでなくてはならない．

の虚部は場の R 対称性のチャージと，また実部は他の大域対称性のチャージと同定されていたのであった．量子的には

$$\sum_{i:\,\text{辺}} \hat{Z}_i = 2\pi i b Q = 2\pi i (b^2+1) \tag{9.20}$$

だとすると（(7.29) にも b^2+1 という組み合わせが現れたことに注意），(9.16) を用いて

$$\sum_{i:\,\text{辺}} r_i = 2\,, \quad \sum_{i:\,\text{辺}} \sigma_i = 0 \tag{9.21}$$

を得る．これは，Φ_i の R チャージを r_i，また $U(1)$ 大域対称性についてのチャージを F_i（i によらない σ によって $\sigma_i = F_i\sigma$）とした時にスーパーポテンシャル $W = \prod_i \Phi_i$ が対称性を保つための条件である．こうして，理想四面体の貼り合わせは，対応する場の理論をスーパーポテンシャルの（湯川型）相互作用によって張り合わせる操作と同定できることが分かった*3)：

スーパーポテンシャルによる場の理論の貼り合わせ
$\longleftrightarrow$ 3 次元理想多面体の貼り合わせ (9.22)

但し，ここのスーパーポテンシャルの項は一般的にはモノポール演算子（第 3.4.1 参照），つまり元のラグランジアンには存在しない場を含む．例外として，理想四面体の貼り合わせられた辺における二面角が，そのまわりの理想四面体全てのモジュラスとして選ばれていたとするとスーパーポテンシャルに現れる場は全てラグランジアンに現れる．これは偏極の取り方に依存するが，そもそもそのような偏極の取り方が可能でない場合もある．

9.3.1　2–3 ミラー対称性

我々は理想四面体に対応する理論を同定し，量子化の偏極のもとでの変化について学んだ．また，理想四面体の貼り合わせについても理解できた．従って，理想四面体の貼り合わせを繰り返すことで，複雑な 3 次元多様体について対応する 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称場の理論を（基本的な理論からの貼り合わせという意味で）同定できたことになる*4)．

---

*3)　スーパーポテンシャルに用いる場がラグランジアンに直接現れる場だったとしても，異なる双対枠に移るとそれはモノポール演算子に変換されうるので，一般には，貼り合わせに用いるスーパーポテンシャルにはモノポール演算子を用いることが必要になる．多くの場合には，スーパーポテンシャルの一つの項に注目する限り，適切な双対枠を用いることでその項に現れる全ての場がラグランジアンに現れる場であるようにできる（が，全ての項を同時にラグランジアンの場で書くことはできない）．但し，理想四面体の辺を同じ四面体の別の辺に貼り合わせている理想四面体分割の場合には，その限りではなく，特定の項に注目した場合でもどの双対枠でもモノポール演算子が必要になる．

*4)　正確には，このように理想四面体のモジュラス z を用いて理解できるのは幾何的な解釈を持つ平坦接続に限定され，例えばゲージ群のカルタンの元に共役である，いわゆるアーベリアン（Abelian）平坦接続は含まれない．この点に関連して 3 次元重力との関連を述べた第 7.3 節，また文献 [160] も参考のこと．

それではペンタゴンに対応する場の理論は何であろうか．ペンタゴンは二つの四面体を三つの四面体に置き換えるが，それはその各々に 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が対応するのでペンタゴンは二つの理論の等価性（双対性）を意味する筈である．

理想四面体のペンタゴン（それは 2 次元的には理想三角形分割のペンタゴンでもあった）から現れる量子ダイログ関数の恒等式は，付録 C で説明するように量子ダイログ関数のペンタゴンである．この式は付録 B の (B.62) にあるが重要な式であるのでここにも重複を厭わず書いておこう：$[\hat{P},\hat{Q}]=\frac{1}{2\pi i}$ なる演算子 $\hat{P},\hat{Q}$ に対して

$$e_b(\hat{P})e_b(\hat{Q})=e_b(\hat{Q})e_b(\hat{P}+\hat{Q})e_b(\hat{P})\ . \tag{9.23}$$

この式は演算子形式の式であるが，期待値を取って c–数の等式に変換でき，その結果として量子ダイログ関数の満たしている関係式 (4.39) を得ることができる（付録 B 参照）．これは 2–3 ミラー対称性を表すのであったのだから，結局次の結論[129]を得たことになる：

$$\begin{aligned}&3\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論における 2–3 ミラー対称性}\\&\qquad\longleftrightarrow\ \text{理想四面体のペンタゴン}\ .\end{aligned} \tag{9.24}$$

なお，本節では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の同定に量子ダイログ関数や S_b^3 分配関数をツールとして用いてきたが，既に場の理論の定義データと 3 次元多様体の幾何的な操作の間に直接の対応関係が付いていることに注意しよう．従って，別の物理量，例えば $S^1\times S^2$ 分配関数を計算しても対応関係は成立する[130]．

9.3.2 古典極限

今度は第 7.3 節でも考えた古典極限 $q\to 1, b\to 0$ を考えよう．理想四面体の波動関数は古典極限で

$$\psi_{\text{理想四面体}}\sim\exp\left[\frac{1}{2\pi i b^2}\mathrm{Li}_2(-e^{2\pi b x})\right] \tag{9.25}$$

と古典ダイログ関数で書かれていた．また量子化の偏極の取り方によっては，これに正準変換の母関数である 2 次式が必要になる（第 5.1 節を思い出そう）．従って，3 次元多様体の古典極限は古典ダイログ関数と 2 次式の和で書かれることになる．このことの 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論における解釈については第 4 章の (4.44) 式付近で説明した．

さて，ここでは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論と 3 次元チャーン＝サイモンズ理論の関係をより明確にしよう．第 7.2 節付近で説明したように，チャーン＝サイモンズ理論の古典極限は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S_b^3 での $b\to 0$ 極限，つまり次元還元である（第 4.4.4 節）．従って，まず

$$S^1 \times \mathbb{R}^2 \text{ 上の 3 次元 } \mathcal{N}=2 \text{ 理論 } \mathcal{T}[M] \text{ の真空} \\ \longleftrightarrow \text{ 3 次元多様体 } M \text{ の平坦接続 .} \tag{9.26}$$

次に，その極限で現れる方程式，つまり**2 次元理論の真空の条件** (4.50) **を，3 次元多様体の貼り合わせ条件** (9.20) **と同一視する**．ツイステッド・スーパーポテンシャルから 2 次元理論の真空が求められた (4.50) ことに対応して，3 次元多様体の波動関数の古典極限を考えると，あるポテンシャルが得られ，その鞍点の方程式として理想四面体の貼り合わせ条件が求められる．このようなポテンシャルは双曲幾何では**ノイマン＝ザギエ・ポテンシャル**（**Neumann-Zagier potential**）[183]として知られている：

$$\text{2 次元のツイステッド・スーパーポテンシャル} \\ \longleftrightarrow \text{ ノイマン＝ザギエ・ポテンシャル .} \tag{9.27}$$

9.4 結び目とブレイド

我々は 3 次元多様体論と 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論との関係の基礎に辿り着いたが，早くも紙数が尽きようとしている．そこで本章の残りでは，幾つかの（主として数理物理的な）トピックについて駆け足で触れていくことにしよう（レビューとしては [184] も参照）．

9.4.1 結びの補空間と AJ 予想

双曲多様体の重要な例が第 7.3.2 節で議論した結び目の補空間であった．これらは理想四面体分割の言葉ではどう表されるだろうか？ 結び目はどこにいるのだろうか？

実は，ここまでの議論では理想四面体の頂点の周りでの取り扱いを曖昧にしてきた．理想四面体の頂点は $\mathbb{H}^3$ の境界 $\partial\mathbb{H}^3$ に存在していることを思い出そう．特に，例えば二つの頂点の間の（双曲構造から標準的に定まる計量で測った）距離はそのままでは発散していた．2 次元双曲幾何の時にパンクチャーの周りに有限サイズのホロサイクルを考えたのと同様に，今は理想四面体の頂点の周りが切り落とされたものを考える（図 9.5）．これらは貼り合わさって結び目の補空間のトーラス境界（第 7.3.2 節参照）を作り上げることになる（このことの例としては演習問題 9.2 参照）．

境界トーラスは二つのサイクル（α-サイクルと β-サイクル）を持ち，複素チャーン＝サイモンズ理論においてそのホロノミーを考えることができる．それが以前第 7 章で定義したメリディアン $\mathfrak{m}$・ロンギチュード $\mathfrak{l}$ であり，境界トーラスに沿って四面体のモジュラスの積を取ることで定まる：

$$\prod_{\text{meridian}} z_i = \mathfrak{m} , \qquad \prod_{\text{longitude}} z_i = \mathfrak{l}^2 . \tag{9.28}$$

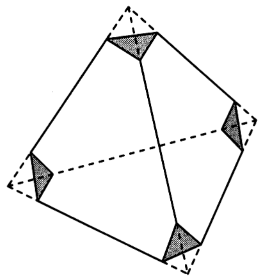


図 9.5 理想四面体の頂点の周りは切り落とされており，そこを結び目が通っている．切り口を集めると結び目の補空間の境界トーラスが得られる．

完備双曲構造の存在を要請するときは $\mathfrak{m}=1$ であり，第 7.3.1 節で述べたモストウ剛性により方程式 (9.19) 及び (9.28) には孤立した解しか存在しない．パラメーター $\mathfrak{m}$ は双曲構造の 1 パラメーター変形を与える[183]．

さて，量子化の元では $\mathfrak{l}$ と $\mathfrak{m}$ は互いに交換しない演算子 $\hat{\mathfrak{l}}$ と $\hat{\mathfrak{m}}$ に量子化され，対応して A-多項式 $A(\mathfrak{l},\mathfrak{m})$ も量子化され波動関数 ψ に対する差分演算子（**量子 A-多項式（quantum A-polynomial）**）$\hat{A}(\hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}})$ に格上げされる．さらに，対応する波動関数 ψ は次の差分方程式を満たす*5)：

$$\hat{A}(\hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}})\psi=0\ . \tag{9.29}$$

ここで ψ は理想四面体の貼り合わせから構成される分解関数であり，第 7.3.1 節で述べたようにジョーンズ多項式と解釈できる．従って，(9.29) はジョーンズ多項式が A-多項式から定まる差分方程式を満たすという主張（**AJ 予想（AJ conjecture）**）と理解できる．

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の言葉では波動関数 ψ は S_b^3 分配関数であったので，$\hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}}$ はそれに作用する演算子を表さなければいけない．実は，これらは (4.28) で出会ったウィルソン・ループ演算子であり，そしてその双対であるボーテックス・ループ演算子である．つまり，(9.29) はウィルソン・ループとボーテックス・ループのなす代数関係式を示しているものと解釈できる．

9.4.2 写像トーラスとブレイド

別のクラスの多様体として，(6.8) で定義した写像トーラス $M=(\Sigma\times S^1)_\varphi$ を考えよう（この場合の 3 次元・3 次元対応については文献 [128], [185], [186] に詳細な議論がなされている）．この場合は，定義そのものに 2 次元面を用いているので第 9.1 節で議論したように，2 次元面の写像類 φ をフリップで表し，各フリップ m に理想四面体 Δ_m を対応させればよい．これを繰り返すことで写像トーラスの四面体分割を得る：

*5) これは 3 次元重力の言葉ではホイーラー＝ドウィット（Wheeler-de Witt）方程式である．

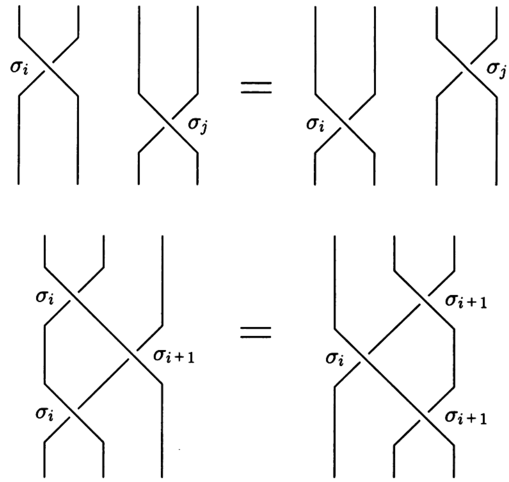


図 9.6 ブレイド群の関係式の図による表現．我々の文脈では，ブレイドは $(n+1)$ 点球面のパンクチャーの時間発展を，また σ_i はパンクチャー $i, i+1$ を囲む閉曲線の周りでのデーン・ツイストを表す．これらの関係式はブレイドを適当な方法で閉じて結び目にしたとき，**ライデマイスター・ムーブ**（**Reidemeister move**）（正確には三つあるうちの二つ）となる．

$$M = \bigcup_{m:\text{フリップ}} \Delta_m \ . \tag{9.30}$$

これは標準的な（canonical）理想四面体分割[187]~[189] として文献で知られているものである．φ が**擬アノソフ**（**pseudo-Anosov**）と呼ばれる条件を満たす時*6)，こうして得られた写像トーラスには双曲構造が入ることが知られており（サーストンによる結果，証明は例えば [190] 参照），上で得られた四面体分割をさらに双曲構造と両立する理想四面体分割として取ることができる．

さて，リーマン面として特に $n+1$ 点球面（$n+1 \geq 4$）を考えよう．この場合の写像類群のうち，特に（$n+1$ 点のうちの）1 点を固定する部分集合は，**ブレイド群**（**braid group**）（をそのセンターで割ったもの）であることが知られており，それは生成元 σ_i を用いて

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ , \tag{9.31}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ , \quad |i-j| > 1 \tag{9.32}$$

と書ける（図 9.6 参照）．

$n+1$ 個の頂点のうち，固定していた一つを除いた n 個の頂点に $1, 2, \ldots, n$ と番号を付けよう．このとき，隣り合う頂点 i と $i+1$ を入れ替える作用は写像類群の元である．これを σ_i と書こう．より正確には，この写像類群の元は

*6) 例えば，Σ としてトーラス T^2 を取ると，φ が $PSL(2,\mathbb{Z})$ 行列として $|\mathrm{Tr}(\varphi)| > 2$ を満たす時に擬アノソフとなる．この意味でジェネリックな φ は擬アノソフであると思ってよい．

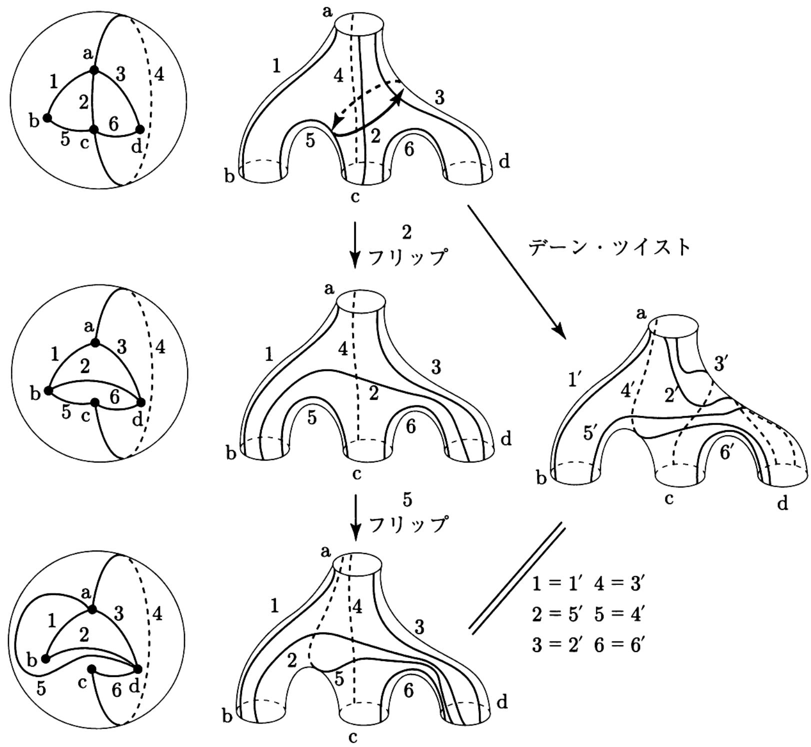


図 9.7 4 点球面のある理想三角形分割に対してのデーン・ツイストの作用．4 点球面の 4 つのパンクチャーのうち二つ c, d を囲む閉曲面の周りでデーン・ツイストを行った．このデーン・ツイストは，三角形分割に対する 2 回のフリップ及び辺のラベルの付け替えを合成したものと等価である，より一般の場合には 4 回のフリップが必要である（[185] の図 C4 を参照）．

二つの頂点を囲む曲線についての**デーン・ツイスト（デーンのねじり，Dehn twist）**と呼ばれる（図 9.7 の例参照）．

デーンツイストは $n+1$ 点球面の理想三角形分割を別の理想三角形分割に送るので，それはフリップの列で表すことができ，対応して量子タイヒュミュラー理論における演算子 $\hat{\mathcal{R}}_i$ が定まる（図 9.7 及び第 8 章参照）．写像類群の元 σ_i は関係式 (9.32) を満たしていたので，対応して演算子 $\hat{\sigma}_i$ も同じ関係式を満たす：

$$\hat{\mathcal{R}}_i \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \hat{\mathcal{R}}_i = \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \hat{\mathcal{R}}_i \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \ . \tag{9.33}$$

こうして構成された演算子 $\hat{\mathcal{R}}_i$ はブレイド群の無限次元表現になっているが，q の値が 1 のべき根になる極限を考えると，この演算子は有限次元に作用する演算子（すなわち行列）に帰着し，それはカシャエフ（Kashaev）によって構成された R 行列に一致することが示される[191]．このカシャエフの R 行列からは 3 次元多様体の不変量を構成することができ[192]，その不変量はジョーンズ多項式の特殊化と一致し，第 7 章 (7.49) 式で述べた体積予想にも現れる量である．

さて，ブレイド群の元（$n+1$ 点球面の写像類群の元 φ）の表現が与えられる

と，φ の作用する方向を時間方向に思うことにして n 本の線が絡まり合った図が得られることになる．これは結び目の両端を切り開いたものであり，**ブレイド（braid）**と呼ばれる．

ここで両端を適切に閉じてやることにより，S^3 における任意の結び目を構成でき，また対応した操作を我々の分配関数に実行することで結び目の不変量を構成することもできる．これを実行する方法は唯一ではない*7)が，例えば一つの方法は次の通りである：例として簡単のために 4 点球面を考えると，四面体の 4 つの面を 2 つずつ同一視すればよく，このとき 4 点を通る 4 本のブレイドは同一視によって 2 本ずつ同一視される[185], [193], [194]．こうして **2 橋結び目（2-bridge knot）**と呼ばれる結び目が構成できる．

同様の構成は，$2n$ 点の時にも一般化できる．この場合，$2n$ 本のブレイドを端で同一視して結び目が得られ，これを結び目の**プラット表示（plat representation）**と呼ぶ．S^3 の任意の結び目はプラット表示を持つことが知られている．また，結び目を定めてもプラット表示には曖昧さがあるが，それは**バーマン・ムーブ（Birman move）**と呼ばれるムーブを考えることで解消できる．これは，結び目の**ブレイド表示（braid representation）**とそれについての**ライデマイスター・ムーブ（Reidemeister move）**の類似である．

9.4.3　A_N 型への拡張

ここまでは 6 次元理論が A_1 型の場合（M5 ブレーンが 2 枚の場合）を議論してきた．それではより一般に A_N 型で $N>1$ の場合（M5 ブレーンが N 枚の場合）には何が起こるだろうか？ 第 6.3.1 節からは $SL(N+1,\mathbb{C})$ チャーン＝サイモンズ理論を考えるべきであることが従う．

第 8 章の（量子）タイヒュミュラー理論に相当するのは，この場合は高次

*7)　一つの方法は，閉 3 次元多様体を**ヘーガード分解（Heegaard decomposition）**により次のように分解することである：

$$M = H_1 \cup_\varphi H_2\ , \quad \partial H_1 = \partial H_2 = \Sigma_{g,0}\ . \tag{9.34}$$

但し，H_1 及び H_2 は**ハンドル体（handlebody）**と呼ばれ，大雑把にいえば，2 次元面 Σ_g を境界に持つもっとも「単純」な多様体である．例えば $g=0$，つまり Σ が球面の時は 3 次元のボール B^3 である．また，Σ はヘーガード曲面，g はヘーガード種数と呼ばれる．

φ は ∂H から $\partial H'$ への写像であり，この写像を用いて二つのハンドル体を貼り合わせることにより閉 3 次元多様体を得ることができる（但し，ヘーガード分解のトポロジカル型のためには $\Sigma_{g,0}$ の写像類の元のみが問題となる）．

任意の閉多様体は（一意ではない）ヘーガード分解を持つことが知られている．もっとも簡単な例として，S^3 はそれを北半球と南半球に分割することができ，それは境界の S^2 で貼り合わさっている．種数 1 のヘーガード分解を持つ例としてはレンズ空間 $S^3/\mathbb{Z}_p$ がある．

我々の設定では閉じた 3 次元多様体ではなく結び目（ウィルソン・ライン）を考える必要があり，我々はハンドル体からブレイドが取り除かれたものを許しておく必要がある．このようにヘーガード分解の概念を適宜拡張しておくことで，S^3 の任意の結び目をこの分解で議論することもできる．

(higher) タイヒュミュラー理論[195]と呼ばれるものである．高次のタイヒュミュラー理論は豊富な内容を持つが，その一側面を手っ取り早く理解するには図 9.8 を見るのがよい．つまり，箙の構成について図 8.4 のルールを図 9.8 のルールに取り替えればよい．これを 3 次元多様体の言葉に翻訳して理想四面体分割の言葉に読み替えることもできる[196]．

なお，A_N 型の場合には結び目でのホロノミーの指定の仕方にはホロノミーのジョルダン・ブロックの形（$N+1$ の分割）で指定される離散的な自由度が存在し，それを考えるとさらに豊かな構造が存在する（例えば [197]）．これらのより一般の状況を議論するためには，第 5.3 節で議論した $T[SU(N+1)]$ 理論及びその拡張が重要な役割を果たす．

9.4.4 クラスター代数への一般化

A_N 型の高次タイヒュミュラー理論では，理想三角形分割から箙を定めるルールを図 9.8 のように修正したが，より一般に理想三角形分割由来ではない箙を考えたらどうだろうか？

付録の第 C.1.1 節では箙 Q を 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の BPS 箙として解釈したが，M5 ブレーンのコンパクト化由来ではない 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考えればその BPS 箙として箙を得ることができる．一般の箙 Q の場合でも，そこから代数 $\mathcal{A}_Q$ やその作用するヒルベルト空間を定めることは全く同様にできる（付録 C を参照）．箙のミューテーションは演算子を定義し，その期待値である分配関数は再度量子ダイログ関数で書けており，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S_b^3 分配関数として解釈できることが分かる[128]．つまり，箙とそのミューテーションは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論（の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 同値類）を定めるのである．

この 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論は，出発点である 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の境界あるいはドメインウォールに現れる理論であると解釈できる．定義データの一つである箙は 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の BPS 箙であり，4 次元理論のゲージ対称性，つまり 3

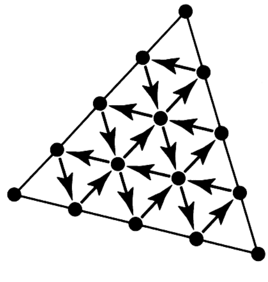


図 9.8　A_N 型 (2,0) 理論のコンパクト化，あるいは $PSL(N+1,\mathbb{C})$ 平坦接続を考えるときには，図 8.4 のルールをこの図のように修正した時に得られる箙を考える．この例では $N=3$ と取った．一般の N の場合には，三角形の各辺に N 個の頂点を配置し，頂点の数の合計は $(N+5)N/2$ となる．

次元理論の大域対称性のチャージを指定する．次に，ミューテーションを行うごとに量子ダイログ関数が，従って，3 次元 $\mathcal{N}=2$ カイラル多重項が対応する．また，量子 y 変数は箙の頂点に置かれていたが，これは対応する大域対称性についてのループ演算子（ウィルソン・ループ及びボーテックス・ループ）として解釈できることになる．箙から定まる量子力学系の偏極の取り替えが 3 次元理論の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換として解釈されるという部分はこれまでと同様である．

演習問題

9.1 [♦]（理想四面体の双曲体積）

双曲計量から定まる体積形式を理想四面体上で積分することにより，モジュラス z で指定される理想四面体の双曲体積が（**ブロッホ＝ウィグナー・ダイログ関数**（**Bloch-Wigner dilogarithm**））

$$D(z) := \mathrm{Im}\,\mathrm{Li}_2(z) + \arg(1-z)\log|z| \tag{9.35}$$

により与えられることを示せ*8)．また，z の値を変化させた時に，その体積が最大になるのはいつで，そのときの双曲体積の値が何であるかを調べよ．さらに，関数 $D(z)$ が

$$D(z) = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = D\left(\frac{z-1}{z}\right) = -D\left(\frac{1}{z}\right) = -D(1-z) = -D\left(\frac{z}{z-1}\right) \tag{9.36}$$

及び

$$D(x) + D(y) = D\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) + D(xy) + D\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) \tag{9.37}$$

を満たすことを示し，理想四面体の言葉でこれらの等式の意味を考えよ．

9.2 [♦]（八の字結び目の補空間）

双曲多様体の理想正四面体による分割の例の中でもっとも有名なものの一つが図 7.1 中央の八の字結び目である*9)．この結び目の補空間はサーストンのレクチャーノート[146]で議論されている有名な例である．

(a) この結び目の補空間が次の二つの理想正四面体によって分割され（図 9.9），またこの場合の境界トーラスの図は図 9.10 で与えられる．このことを自分なりに納得せよ（ヒント：図 9.9 を納得する助けとしては例えば[198], [199]を参照）．

(b) 図 9.10 から，八の字結び目の場合に双曲構造を決定する方程式が

$$z^2 z' w^2 w' = 1\ , \quad z' z''^2 w' w''^2 = 1\ , \tag{9.38}$$

あるいは整理して

$$z(1-z)w(1-w) = 1 \tag{9.39}$$

と求まることを示せ（二つの方程式は同じ条件を与える）．

(c) メリディアンとロンギチュードを計算すると

---

*8) 関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ は複素平面上にブランチカットを持つが，$D(z)$ はカットを持たない．

*9) この結び目の補空間は 1 点トーラスの写像トーラスとしても実現できる．

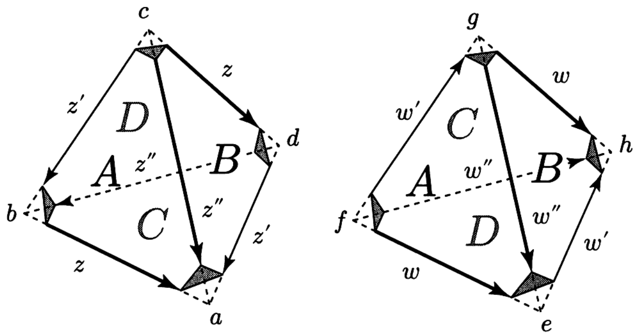


図 9.9　八の字結び目の補空間は，二つの理想四面体により四面体分割される．ここでラベルの同じ面どうし，また細い・太い線どうしは同一視される．

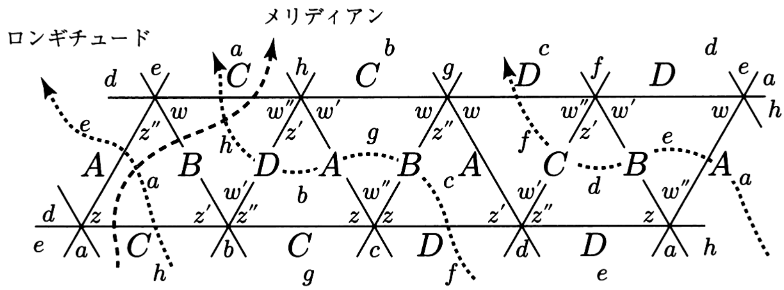


図 9.10　八の字結び目の補空間の境界トーラスの三角形分割．モジュラスの積からロンギチュードとメリディアンが計算できる．ロンギチュードがこの図で水平方向の直線ではないことに注意．

$$\mathfrak{m} = z'^{-1}w = (1-z)w\ , \quad \mathfrak{l}^2 = (zw''z'^{-1}w''^{-1})^2 = \left(\frac{z}{z'}\right)^2 \tag{9.40}$$

となることを示せ．次に，(9.39) 及び (9.40) から z と w を消去すると（但し $\mathfrak{l}$ の符号は $\mathfrak{l} = -\frac{z}{z'}$ と選ぶ），

$$A_{4_1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{l}) = \mathfrak{l} + \mathfrak{l}^{-1} + (-\mathfrak{m}^{-2} + \mathfrak{m}^{-1} + 2 + \mathfrak{m}^1 - \mathfrak{m}^2) = 0 \tag{9.41}$$

が得られることを示せ．これが八の字結び目に対する A-多項式である．完備双曲構造に対応する条件 $\mathfrak{m} = 1$ をさらに考えると四面体のモジュラス z, w を定めることができる（モストウ剛性の例）．こうして計算できた z, w の値を演習問題 9.1 と組み合わせることで，八の字結び目の補空間の双曲体積を求めよ．

9.3　[♦]（計算機による 3 次元双曲幾何）

3 次元多様体，特に双曲多様体の幾何については近年計算機を活用した研究が進展してきており，その為のツールも複数開発されてきている．その代表格がプログラム SnapPea[*10] である．また SnapPea のユーザーインターフェースである SnapPy[*11] も有用である（図 9.11）．

SnapPea/SnapPy をインストールして遊んでみよう．例えば，図 7.1 の結び目の補

*10)　http://www.geometrygames.org/SnapPea/ からダウンロードできる．
*11)　http://snappy.computop.org からダウンロードできる．

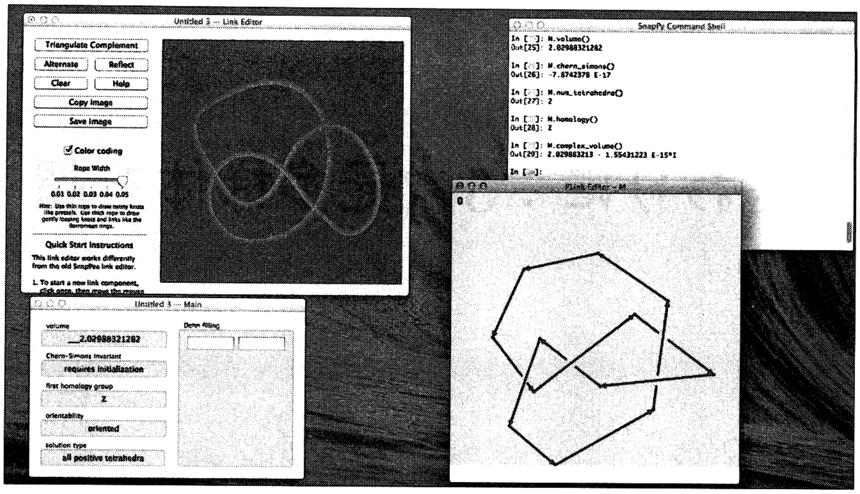


図 9.11　SnapPea（左）及び SnapPy（右）のスクリーンショット．

空間の双曲体積及びチャーン＝サイモンズ不変量を数値的に計算し，演習問題 9.2 で求めた厳密な値と比較してみよ．またこの結び目の補空間の基本群 π_1 を計算しよう．

9.4　[♦]（2–3 ミラー対称性の極限）

付録 B では，ペンタゴン恒等式 (4.39) の極限として (B.11) が得られた．前者は 2–3 ミラー対称性を表していた，それでは，前者から後者を得る操作の各ステップを，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の立場から理解できるだろうか？

第 10 章
終わりに：3次元多様体を超えて

本書は次の問いかけから始まった：**量子場の理論とは何なのだろうか？**

量子場の理論は長い歴史を持つ巨大な体系であり，この問いには決定的な答えを出すことは難しいかもしれない．しかし，物理学の本質はごく少数の原理・原則から複雑な世界を理解することであって，いかに複雑な理論体系であってもスクラップ・ビルドの繰り返しの中でその本質が抽出されてくるのは歴史の教えるところである．

勿論，現時点での筆者は上の問いに対する満足の行く答えを持ち合わせていない．しかし，本書において筆者は，場の理論の一つの（限定されてはいるが，しかし本質的だと筆者が信じている）側面に光をあてることで，量子場理論に再度向き合おうとした—その概念的な問題意識から出発し，それを超対称場の理論での具体的な設定において物理的・数学的に精密に議論しようと試みた．

本書では場の理論の幾つかの側面を強調してきた．まず一つは**繰り込み（renormalization）**の概念，そして場の理論が**低エネルギー有効理論（low-energy effective theory）**であるという認識である．そして繰り込み群の**ユニバーサリティ（普遍性，universality）**の一つの現れが，場の理論の**双対性（duality）**である．さらに，場の理論をゲージ化（gauging）によって結合・分割することで，場の理論の**理論空間（theory space）**に存在する幾何的・代数的構造へと導かれた．つまり，場の理論の**集合**を考えることで初めて現れる構造が存在するのである．

この構造を探るために，我々は 6 次元 (2,0) 理論（M5 ブレーン）の 3 次元多様体でのコンパクト化から出発した（第 6 章）．こうして現れた 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論（第 3 章）は，S_b^3 分配関数（第 4 章）というツールによって自由自在に解析でき，その結果として現れる理論空間に現れる量子力学系の構造（第 5 章）が，3 次元多様体の量子化から現れる量子力学構造（第 8，9 章）と対応した．

6 次元理論のコンパクト化においては，最初からコンパクト化する多様体の幾何から出発していたので，そこから現れる理論の集合に幾何的な構造が入る

ことは（少なくとも大雑把な意味では）保証されているといってもよい．しかし，場の理論の集合に豊かな構造が存在するということは，M5 ブレーンの直接的なコンパクト化に限定されるものではない．

そのような例として，第 2.1.2 節で議論した箙ゲージ理論を超対称化し，4 次元 $\mathcal{N}=1$ にしたものを考えよう*1)．このとき場の理論の定義データとして必要なのはグラフだけであるから，そこに単純なグラフ以外の構造が存在するかは全く明らかではない．

しかし，興味深いことに，こうして定義された場の理論の空間には可積分構造が存在するのである[202]*2)．可積分構造を見抜くための鍵となるのはザイバーグ双対性（第 1.3.3 節参照）である．箙の言葉に翻訳するとこの双対性は箙に対する操作に翻訳されるが，実は全く同じグラフの変換が可積分系で知られていたのであり（これはスター・スター関係式（star-star relation）と呼ばれる），このことに着目すると，可積分性を定める**ヤン＝バクスター方程式（Yang-Baxter equation）**は 4 次元箙ゲージ理論の間の双対性（**ヤン＝バクスター双対性（Yang-Baxter duality）**）に翻訳される．一度可積分性が場の理論の双対性に翻訳されれば，今度は場の理論の分配関数，例えば $S^1 \times S^3$ 分配関数（**超共形指数（superconformal index）**）やその $S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_r$ への拡張[25]を考えることで，新しい（楕円量子群に関連した）可積分系模型を系統的に構成することができる．

ここでも，3 次元多様体の時と同様に，可積分構造は一つの場の理論に存在するのではなく，理論**の集合**（理論空間）を考えた時に初めて明らかになるということである．

現時点ではこのように場の理論の理論空間に構造が見つけられた例は多くないが，繰り込み群のユニバーサリティが一般的な現象であることは，このような構造がより一般的であることを示唆しているのではないかと筆者は信じている*3)．ここでの「構造」とは，多様体のような幾何構造であってもよいし，可

---

*1) スーパーポテンシャルも指定してやる必要があるが，これは箙を平面に実現したものから自然に定めてやることができる．詳細は例えば [197], [200], [201] を参照．

*2) [203], [204] も参照．これらの場の理論はブレーンからの実現が知られている[205]．

*3) ここでは一般に量子効果が本質的である（例えば，本書で議論した例のほとんどは赤外固定点の周りで強結合となる）．より一般的には，場の理論に限らず量子系そのものを直接的に理解できるかどうかが本質的なのではないだろうか．

通常の量子力学のアプローチでは，まずそれ自身で問題なく存在する古典系から出発する．次に，それを「量子化」することで，量子系を得るのである．勿論，古典系が一つ与えられたからといって，その量子化は一意であるとは限らない．しかし，量子系から出発すれば対応して一意に古典極限が存在するということは場の理論の暗黙の了解であった．また，アノマリーの議論に見られるように，古典系が無矛盾であっても量子系に矛盾が起こりうることはよく知られている．

しかし，事情はそれよりももっと複雑である：本書で強調してきたように，一つの量子論は複数の（一般には無限の）古典極限を持つかもしれないし，逆にそもそも古典極限（ラグランジアン）を持たない量子論も存在する．双対性という現象は，量子的な理論を直接理解できない我々が，古典的なツールを使って理解しようとした時に本質的に現れる

積分構造でもよいし，またクラスター代数のような代数的な構造であってもよい[128], [207]．

こうした場の理論の理論空間の構造は，場の理論の長い歴史にもかかわらずほとんど手つかずの分野である．勿論例外はないわけではなく，共形場理論のマージナル変形のなす空間やその計量（ザモロドチコフ計量（Zamolodchikov metric））は，その一種である．しかしゲージ化による理論の結合・分解の構造を完全に理解するためには，伝統的な場の理論を超えた枠組みが必要とされているのではないだろうか．

筆者は，その一つの手がかりは超弦理論にあるのではないかと考えている．超弦理論は場の理論と重力理論を含む理論であるが，適切な極限操作を行ってやると重力の自由度を落として純粋な場の理論を取り出すことができる．その際，場の理論の情報が幾何（例えばカラビ＝ヤウ多様体の幾何）の情報に置き換わることになる．本書で扱った3次元多様体と3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論との対応はその一つのバリエーションである．

このように，超弦理論は幾何の取り方を変えることで場の理論を系統的に構成するツールとして有用であり，90年代からこの考え方は様々な文脈で応用されてきた．しかし，超弦理論の考え方をより真摯に捉えると，**通常顧みられない場の理論の理論空間の構造そのものが示唆されている**と考えることもできる．実際，超弦理論においては場の理論はブレーン上の有効理論として与えられる．しかし，ブレーンはそれ自体超弦理論の力学的な自由度であり，例えばブレーンの枚数はダイナミクスに応じて変化するものであり，超弦理論においては異なる場の理論は一つの理論の異なる状態として現れるようにみえるのである．

もっとも，こうした考えはまだ漠然としており，実際に場の理論の理論空間の理解に役立つかどうかは明らかではない．場の理論の理論空間には何が潜んでいるのか，場の理論の理論空間について超弦理論は何を教えてくれるのか，そしてそれは我々の場の理論の理解をどう書き換えるのか？ 本書で紡ぎ出されたスートーリーは，そのための極僅かな一歩に過ぎない，この本の読者がこれらの問いに興味を持ち，ある日世界に驚きをもたらしてくれることを切に願う．

冗長性であると考えることもできる．

念のため，双対性自体は古典系でも存在することに注意しておこう．本書のポイントの一つは，双対性の中には量子効果が本質的なものも存在するということである．

なお，古典と量子の関係は，弦理論ではより微妙である．例えばストロミンジャーによる例[206]では，古典的な幾何は特異点を持つが，その特異点は非摂動効果を加えることによって初めて解消され，量子論は問題なく存在する．

付録 A
超対称の世界への道標

本書では様々な次元や超対称性を持つ場の理論を考えるので，1 次元から 6 次元まで，各次元の超対称場の理論が一斉に現れる．これは本書の世界の豊穣さの一端を示すものであり，本書では随所にその理論同士の関連を強調するようにしたが，同時に読者にとっては話をややこしくする原因であるかもしれない．そこで本付録では本書に現れる超対称場の理論について手短に整理しておこう．これらについては本文中でも適宜説明されるが，ここでまとめておくのは便利かもしれない．ここでは本書に関係する部分（表 A.1）にしか言及しないが，同様のまとめは例えば [208, Appendix B] 等の教科書にも見つかる．なお，以下では超対称性を off-shell で保つために必要な補助場については述べず，on-shell の自由度のみを列挙する．また，以下では常に ϕ は実スカラー場，λ はその次元での最小の成分を持つフェルミオンとする．

6 次元

6 次元ではワイルフェルミオンが存在し，その成分は $2^{[\frac{6}{2}]}/2 \times 2 = 8$ 個の実成分を持つ（2 で割ったのはワイル条件のため，また 2 倍したのは複素成分を実数で数えるため）．

本書では 6 次元 $(2,0)$ 理論（但し，A_N 型，ほとんどの部分では A_1 型）を議論する．$(2,0)$ テンソル多重項は $(B_{\mu\nu}, \phi_{1,\cdots,5}, \lambda_{1,2})$ であり，$B_{\mu\nu}$ は $dB = *dB$ を満たす自己双対完全反対称 2–形式及び 5 個の実スカラーを含む．R 対称性は $Sp(4)_R \sim SO(5)_R$ であり，5 個のスカラー $\phi_{1,\cdots,5}$ は $SO(5)_R$ の **5** 表現として変換する．

$(2,0)$ テンソル多重項は $(1,0)$ テンソル多重項と $(1,0)$ ハイパー多重項及び $(1,0)$ ハイパー多重項に分解する．$(1,0)$ テンソル多重項は $(B_{\mu\nu}, \phi_1, \lambda_1)$．$(1,0)$ ハイパー多重項 $(\phi_{2,\cdots,5}, \lambda_2)$ は二つの複素スカラー $\phi_2 + i\phi_3, \phi_4 + i\phi_5$ を含む．$(1,0)$ 理論の R 対称性は $Sp(2)_R \simeq SO(3)_R$ である．

表 A.1 本書で現れる超対称場の理論．本書に直接関係する部分だけを書いた．

超対称チャージの数 / 時空の次元	16	8	4
6	$\mathcal{N}=(2,0)$	-	-
5	$\mathcal{N}=2$	-	-
4	$\mathcal{N}=4$	$\mathcal{N}=2$	$\mathcal{N}=1$
3	-	$\mathcal{N}=4$	$\mathcal{N}=2$
2	-	-	$\mathcal{N}=(2,2)$
1	-	-	$\mathcal{N}=4$

5 次元

5 次元ではワイルフェルミオンもマヨラナフェルミオンも存在せず，ディラックフェルミオンは $2^{[\frac{5}{2}]}\times 2=8$ 個の実成分を持つ

本書で議論するのは 5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論であり（第 6 章），6 次元 (2,0) 理論の次元還元として得られる．第 6 章で議論したように，次元還元により自己双対完全反対称 2–形式 $B_{\mu\nu}$ はゲージ場 A_μ に帰着し，$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は $(A_\mu,\phi_{1,\cdots,5},\lambda_{1,2})$ となる．この理論の R 対称性は 6 次元 (2,0) 理論と同じ $Sp(4)_R\sim SO(5)_R$ である．

この多重項の $\mathcal{N}=1$ 超対称性のもとでの分解は 6 次元の場合と同様である．つまり，$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は $\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項 (A_μ,ϕ_1,λ_1) 及び $\mathcal{N}=1$ ハイパー多重項 $(\phi_{2,\cdots,5},\lambda_2)$ に分解する．

4 次元

4 次元にはワイルフェルミオン及びマヨラナフェルミオンが存在し，それは $2^{[\frac{4}{2}]}\times 2/2=4$ 個の実成分を持つ．

本書では第 1 章，第 5 章等で 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論に触れた．4 次元 $\mathcal{N}=4$ ベクトル多重項は $(A_\mu,\phi_{1,\cdots,6},\lambda_{1,\cdots,4})$．これは 5 次元 $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項の次元還元である．但し，5 次元のフェルミオンは 4 次元のマヨラナフェルミオン二つに分解し，従って，今は 4 つのマヨラナフェルミオンが存在することに注意．R 対称性は $U(1)\times SU(4)\simeq U(1)\times SO(6)$ であり，6 個のスカラーは $SO(6)$ の **6** 表現で変換する．

5, 6 次元の時と同様に，$\mathcal{N}=4$ 多重項は 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性の元では $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項 $(A_\mu,\phi_{1,2},\lambda_{1,2})$ 及び $\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項 $(\phi_{3,\cdots,6},\lambda_{3,4})$ に分解する．

本書では 6 次元 (2,0) 理論を 2 次元リーマン面 Σ にコンパクト化して得られる 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 $\mathcal{T}[\Sigma]$ を考える．これらの理論は $U(1)\times SU(2)\simeq U(1)\times SO(3)$ R 対称性を持つ．

さらに超対称性を下げると 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性になる．これは教科書等では最も典型的な超対称性であり，本書では例えばザイバーグ双対性の議論で

少し言及した．$\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項は (A_μ,λ)，$\mathcal{N}=1$ カイラル多重項は $(\phi_{1,2},\lambda)$ を持つ．$\mathcal{N}=2$ 多重項の $\mathcal{N}=1$ 超対称性のもとでの分解を考えると，$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は $\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項及び随伴表現に値を持つ $\mathcal{N}=1$ カイラル多重項に分解し，また $\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項は互いに共役の表現で変換する二つの $\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項に分解する．

3 次元

3 次元にはマヨラナフェルミオンが存在し，それは $2^{[\frac{3}{2}]}\times 2/2=2$ 個の実成分を持つ．従って，4 次元のマヨラナフェルミオンは，3 次元に次元還元すると二つのマヨラナフェルミオンに分解する．従って，例えば 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の次元還元は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論である（第 3 章）．

多重項の構造はやはり次元還元から得られる．その多重項に含まれる場は，$\mathcal{N}=4$ ベクトル多重項は $(A_\mu,\phi_{1,2,3},\lambda_{1,\cdots,4})$，$\mathcal{N}=4$ ハイパー多重項は $(\phi_{1,\cdots,4},\lambda_{1,\cdots 4})$．また $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は $(A_\mu,\phi,\lambda_{1,2})$，また $\mathcal{N}=2$ カイラル多重項は $(\phi_{1,2},\lambda_{1,2})$．$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項のスカラー場 ϕ は本書では σ と書いた．3 次元 $\mathcal{N}=2,4$ 理論はそれぞれ $SO(2),SO(4)$ R 対称性を持つ．

分解の仕方も 4 次元と同様で，$\mathcal{N}=4$ ベクトル多重項は $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項及び随伴表現に値を持つ $\mathcal{N}=2$ カイラル多重項に分解し，また $\mathcal{N}=4$ ハイパー多重項は互いに共役の表現で変換する二つの $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項に分解する．

3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論は本書の主役であり，3 次元多様体のコンパクト化に付随した理論 $\mathcal{T}[M]$ として現れるほか，第 4 章の S^3 分配関数も一般の 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に適用できるツールであった．

2 次元

2 次元にはマヨラナワイルフェルミオン（マヨラナ条件とワイル条件を同時に課したフェルミオン）が存在し，それは $2^{[\frac{2}{2}]}\times 2/2/2=1$ 個の実成分を持つ．特に，右巻きと左巻きが別の数のフェルミオンを持つことができ（ここではそれらをそれぞれ $\lambda,\overline{\lambda}$ で表そう），例えば 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超対称性というのはそれぞれが 2 個，計 4 個の超対称性を持つことを表している．

本書では 2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 理論は，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の次元還元として現れる．この次元還元はチャーン=サイモンズ理論の古典極限として理解される．

2 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ ベクトル多重項に含まれる場は $(A_\mu,\phi_{1,2},\lambda_{1,2},\overline{\lambda}_{1,2})$，カイラル多重項は $(\phi_{1,2},\lambda_{1,2},\overline{\lambda}_{1,2})$．

付録 B
古典及び量子ダイログ関数の世界

この付録では，古典及び量子ダイログ関数（二重対数関数，dilogarithm function）の定義とその性質を手短にまとめておく．本文中で議論されるように，これらの特殊関数の持つ性質の多くは直接的なゲージ理論的・幾何的解釈を持ち，その意味において物理的考察からも導くことができる．

B.1 古典ダイログ関数

古典ダイログ関数（**classical dilogarithm function**）と呼ばれるものには，まず**オイラー・ダイログ関数**（**Euler dilogarithm function**）$\mathrm{Li}_2(x)$*1)

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x dt\, \frac{\log(1-t)}{t} \tag{B.1}$$

がある．(B.1) の和の式は $|x| < 1$ のみで収束するが，(B.1) の積分形を使って複素平面上に $\mathrm{Li}_2(x)$ の定義を拡張できる．但し，$\mathrm{Li}_2(x)$ は実軸上 $x > 1$ にカットを持つ．

もう一つは**ロジャーズ・ダイログ関数**（**Rogers dilogarithm function**）$L(x)$ であり，その定義は

$$\begin{aligned} L(x) &:= \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\log x \log(1-x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^x dt \left(\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t} \right) . \end{aligned} \tag{B.2}$$

この関数は複素平面上にカットを持たないことに注意しよう．

古典ダイログ関数は数多くの公式を満たすことが知られている[209]．その中でも重要なのがアーベル（Abel）による次の**ペンタゴン恒等式**（**五項恒等式**，

*1) この関数は多くの数式処理プログラムに組み込まれている．例えば Mathematica では `PolyLog[2,x]` とすればよい．

pentagon identity）である：

$$L(x)+L(y)=L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+L\left(xy\right)+L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) . \tag{B.3}$$

この式は Li_2 で書き直すと

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(y)&=\mathrm{Li}_2\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+\mathrm{Li}_2\left(xy\right)\\&\quad+\mathrm{Li}_2\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right)+\log\left(\frac{1-x}{1-xy}\right)\log\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) .\end{aligned} \tag{B.4}$$

また次の式も成り立つ：

$$L(x)+L(1-x)=L(1)=\frac{\pi^2}{6} . \tag{B.5}$$

あるいは Li_2 で書き直して

$$\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)+\log x\log(1-x)=\frac{\pi^2}{6} . \tag{B.6}$$

逆に，この二つ (B.3), (B.5) が成立する 1 変数関数で 3 回以上微分可能なものは $L(x)$ しかないことを証明できる．これには関数方程式 (B.3) を仮定しそれを x, y について微分して得られる微分方程式を解けばよい（文献 [210, section 4]）．

B.2 量子ダイログ関数

さて次に**量子ダイログ関数**（**quantum dilogarithm function**）を考えよう．名前が示すように，これは古典ダイログ関数の 1 パラメーター変形である．

ややこしいことに，量子ダイログ関数という名称は文献によって複数の異なる関数を指し示しており，それらは本書の記法では $(x;q)_\infty, s_b(x), e_b(x)$ と書かれる*2)．この本では主にそのうち二つ $s_b(x), e_b(x)$ を用いる．区別のため，$(x;q)_\infty$ をコンパクト量子ダイログ関数，$e_b(x), s_b(x)$ を非コンパクト（non-compact）量子ダイログ関数あるいはモジュラー（modular）量子ダイログ関数と呼ぶことも多い．後者は文献によっては二重サイン関数（double sine function），双曲ガンマ関数（hyperbolic gamma function），量子指数関数（quantum exponential function）等と呼ばれることもあり，表記法も複数存在するので注意が必要である．本書の記法はリウビユ（Liouville）理論及び超対称ゲージ理論の文脈ではもっとも標準的な記法のうちの一つである．

ここで述べる量子ダイログ関数は，新谷[212]による先駆的な研究の後，90 年代初頭に黒川[213]によって定義された．本書で用いる形はファデエフ（Faddeev）とその共同研究者によるものであり，量子ペンタゴン恒等式も彼らによる[214]~[216]．

*2) Mathematica では $(x;q)_\infty$ は `qPochhammer[x,q]` と定義されている．$e_b(x), s_b(x)$ は組み込み関数としては定義されていないが $(x;q)_\infty$ から作ることができる（但し，後に述べるように収束性には注意）．量子ダイログ関数の可視化については [211] を見よ．

その性質については例えば [217]~[219], [220, section III] や [221, Appendix] も参照されたい.

B.2.1 $(x;q)_\infty$

定義

関数 $(x;q)_\infty$ は **q–ポッホハンマー記号**（**q-Pochhammer symbol**）[*3)]

$$(x;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-xq^k) \tag{B.7}$$

で $n\to\infty$ としたものであり,

$$(x;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n) \tag{B.8}$$

で定義される. 但しここで $|q|<1$, x は任意の複素数である.

この関数は q-シフトされた階乗（q-shifted factorial）とも呼ばれる. この名前の由来は, $\lim_{q\to1}[n]_q\to n$ となる q-整数を

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} \tag{B.9}$$

で定義したとき, $[n]_q!\,(1-q)^n=(q;q)_n$ となることである.

関数関係式

この関数は関係式

$$(x;q)_\infty=(1-x)\,(qx;q)_\infty\ ,\quad (0;q)_\infty=0 \tag{B.10}$$

を満たしている. このことを使うと無限和表示

$$\begin{aligned}(x;q)_\infty &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}x^n\ ,\\ \frac{1}{(x;q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_n}x^n\end{aligned} \tag{B.11}$$

を示すことができる.

古典極限

本書の目的の為には $q\to1^-$（q が $|q|<1$ から 1 に近づく）の極限が重要である（演習問題 B.2）:

$$(qx;q)_\infty \xrightarrow{q\to1^-} \exp\left(\frac{1}{\log q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(\log q)^n}{n!}\mathrm{Li}_{2-m}(x)\right)\ . \tag{B.12}$$

但し B_n は n 次のベルヌーイ（Bernoulli）数[*4)]であり,

---

*3) 実際には英語風にポックハンマーと呼ばれることも多い.

*4) 関＝ベルヌーイ数と呼ぶべきという意見もある.

$$B_0 = 1\ , \quad B_1 = -\frac{1}{2}\ , \quad B_2 = \frac{1}{6}\ , \quad B_4 = -\frac{1}{30}\ , \cdots \\ B_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 1)\ . \tag{B.13}$$

である．また k 次の多重対数関数（polylogarithm）$\mathrm{Li}_k(x)$ は

$$\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \tag{B.14}$$

で定義される（この関数は $k=2$ の時は先に定義したオイラーの古典ダイログ関数 (B.1) と一致する）．特に展開 (B.12) の主要な寄与は古典ダイログ関数で与えられるので，$(x;q)_\infty$ はその 1 パラメーター変形と看做すことができる．

量子ペンタゴン恒等式

q-ポッホハンマー記号の満たす最も重要な性質が（量子）ペンタゴン恒等式である：$\hat{X}\hat{Y} = q\hat{Y}\hat{X}$ を満たす演算子 $\hat{X}, \hat{Y}$ に対して

$$(\hat{Y};q)_\infty (\hat{X};q)_\infty = (\hat{X};q)_\infty (-\hat{Y}\hat{X};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty \tag{B.15}$$

が成立する．

式 (B.15) の証明についてコメントしておこう．まず，$\hat{X}, \hat{Y}$ の交換関係から

$$(\hat{X}+\hat{Y})^n = \sum_{k=0}^{n} \hat{X}^k \hat{Y}^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\ , \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q}{[k]_q\,[n-k]_q} \tag{B.16}$$

が（例えば，帰納法によって）容易に示せる．これは，見慣れた二項係数による展開式の q-変形である．この式 (B.16) よりまず

$$(\hat{X};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty = (\hat{X}+\hat{Y};q)_\infty \tag{B.17}$$

が従う．次に，

$$\begin{aligned} (\hat{Y};q)_\infty (\hat{X};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty^{-1} &= \left((\hat{Y};q)_\infty \hat{X} (\hat{Y};q)_\infty^{-1};q\right)_\infty \\ &= \left(\hat{X}(q^{-1}\hat{Y};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty^{-1};q\right)_\infty = \left(\hat{X}(1-q^{-1}\hat{Y});q\right)_\infty \\ &= \left(\hat{X}-\hat{Y}\hat{X};q\right)_\infty\ . \end{aligned} \tag{B.18}$$

最後に，(B.18)，(B.17) を順次使うことで

$$\begin{aligned} (\hat{Y};q)_\infty (\hat{X};q)_\infty &= (\hat{X}-\hat{Y}\hat{X};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty \\ &= (\hat{X};q)_\infty (-\hat{Y}\hat{X};q)_\infty (\hat{Y};q)_\infty \end{aligned} \tag{B.19}$$

が示せた．但し，最後は $\hat{X}(\hat{Y}\hat{X}) = q(\hat{Y}\hat{X})\hat{X}$ を用いた．

q-ポッホハンマー記号に対するペンタゴン恒等式 (B.15) の半古典極限を取ることで古典ダイログ関数に対するペンタゴン恒等式 (B.3) を示すことができる（演習問題 B.3）．このように，$(x;q)_\infty$ は古典ダイログ関数の性質を保った良い「量子化」であると言える．

B.2.2 $e_b(x), s_b(x)$

定義

さて，本書で主に用いるのは関数 $(x;q)_\infty$ を組み合わせて得られる関数 $e_b(x)$ 及び $s_b(x)$ である．まず変数 q に関連した複素変数 b, Q 及び $\overline{q}$ を

$$q = e^{i\pi b^2}\ , \quad \overline{q} := e^{-i\pi b^{-2}}\ , \quad Q := b + b^{-1} \tag{B.20}$$

により定義する．この変数 b では古典極限 $q \to 0$ は $b \to 0$ となること，また Q は b と b^{-1} の入れ替えで保たれることに注意されたい．量子ダイログ関数 $e_b(x)$ は q-ポッホハンマー記号の比として定義される：

$$e_b(x) := \frac{(e^{2\pi\left(x+\frac{iQ}{2}\right)b}; q^2)_\infty}{(e^{2\pi\left(x-\frac{iQ}{2}\right)b^{-1}}; \overline{q}^2)_\infty} = \frac{(-qe^{2\pi bx}; q^2)_\infty}{(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^2)_\infty}\ . \tag{B.21}$$

但し，ここで収束性の為に $|q|, |\overline{q}| < 1$ が必要であり，それは例えば $b^2 \in i\mathbb{R}_{>0}$ の時に満たされる．もう一つの関数 $s_b(x)$ は $e_b(x)$ と 2 次式及び定数項部分を除いて同じである：

$$\begin{aligned} s_b(x) :&= e^{-\frac{i\pi x^2}{2}} e^{\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} e_b(x) \\ &= e^{-\frac{i\pi x^2}{2}} e^{\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(e^{2\pi\left(x+\frac{iQ}{2}\right)b}; q^2)_\infty}{(e^{2\pi\left(x-\frac{iQ}{2}\right)b^{-1}}; \overline{q}^2)_\infty} \\ &= e^{-\frac{i\pi x^2}{2}} e^{\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(-qe^{2\pi bx}; q^2)_\infty}{(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^2)_\infty}\ . \end{aligned} \tag{B.22}$$

以下では $e_b(x)$，$s_b(x)$ のうちその都度便利な方を用いる．例えば S^3 分配関数の局所化に自然に現れるのは $s_b(z)$ であるが，古典ダイログ関数やペンタゴン恒等式との関係は $e_b(z)$ で書いた方がシンプルである．

参考までに，$s_b(x)$ の定義に現れた組み合わせ $-\frac{i\pi x^2}{2} + \frac{i\pi}{24}(2-Q^2)$ は 2 次のベルヌーイ（Bernoulli）多項式 $B_{2,2}(x;\omega_1,\omega_2)$ で与えられる：

$$B_{2,2}(x;\omega_1,\omega_2) := \frac{x^2}{\omega_1\omega_2} - \frac{x}{\omega_1} - \frac{x}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{6\omega_2} + \frac{\omega_2}{6\omega_1} + \frac{1}{2}\ , \tag{B.23}$$

$$\frac{i\pi}{2} B_{2,2}\left(ix + \frac{Q}{2}; b, b^{-1}\right) = -\frac{i\pi}{2}x^2 + \frac{i\pi(2-Q^2)}{24}\ . \tag{B.24}$$

一般に，ベルヌーイ多項式 $B_{m,n}(x;\omega_1,\dots,\omega_m)$ は関係式

$$\frac{y^m e^{xy}}{\prod_{k=1}^m (e^{\omega_k y} - 1)} = \sum_{n=0}^\infty B_{m,n}(x;\omega_1,\dots,\omega_m)\frac{y^n}{n!} \tag{B.25}$$

により定義され，その対角部分 $B_{m,n}$ は一般に多重ガンマ関数のモジュラー変換に現れる．通常 n 次のベルヌーイ多項式と呼ばれるのは $B_n(x) := B_{1,n}(x,1)$ のことである．

古典極限

関数 $e_b(x)$ の $b \to 0$ での振る舞いを考えよう．これには例えば b を $b^2 = i\epsilon$

として $\epsilon \to 0^+$ の極限を取ればよく，そのとき $\overline{q} \to 0$．従って (B.21) の分母の項は $\overline{q} \to 0$ で消え，(B.12) から読み取った古典極限の主要項は

$$e_b(x) \xrightarrow{b\to 0} \exp\left(\frac{1}{2\pi i b^2}\mathrm{Li}_2(-e^{2\pi b x}) + \mathcal{O}(b^0)\right) \ . \tag{B.26}$$

これと (B.22) より直ちに

$$s_b(x) \xrightarrow{b\to 0} \exp\left(\frac{1}{2\pi i b^2}\left(\mathrm{Li}_2(-e^{2\pi b x}) + \frac{1}{4}(2\pi b x)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right) + \mathcal{O}(b^0)\right) \ . \tag{B.27}$$

関数関係式

定義式 (B.21)，(B.22) より直ちに関数関係式

$$e_b\left(x - \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right) = (1 + e^{2\pi b^{\pm 1} x})\, e_b\left(x + \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right) \ , \tag{B.28}$$

$$s_b\left(x - \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right) = (2\cosh \pi b^{\pm 1} x)\, s_b\left(x + \frac{ib^{\pm 1}}{2}\right) \tag{B.29}$$

が導かれる．

解析接続

ここまでの議論では変形のパラメーター b の値に制限が付いていたが，複素平面上で解析接続することにより，b 及び引数 z は一般の複素数に取ることができる．超対称ゲージ理論への応用では特に b の値が正の実数の場合を考える必要があり，そこでは (B.21) が収束しないので解析接続は必須である．

解析接続の後，複素 x 平面上の $|\mathrm{Im}(x)| < \frac{|\mathrm{Re}Q|}{2}$ の領域では関数 $e_b(x)$ は次の積分表示を持つ：

$$\begin{aligned} e_b(x) &= \exp\left(\frac{1}{4}\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \frac{dw}{w}\frac{e^{-i2xw}}{\sinh(bw)\sinh(b^{-1}w)}\right) \\ &= \exp\left(\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \frac{dw}{w}\frac{e^{-(ix+\frac{Q}{2})w}}{(1-e^{-bw})(1-e^{-b^{-1}w})}\right) \\ &= \exp\left(\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \frac{dw}{w}\frac{e^{-(ix-\frac{Q}{2})w}}{(e^{bw}-1)(e^{b^{-1}w}-1)}\right) \ . \end{aligned} \tag{B.30}$$

但し，積分の径路は極 $w = 0$ を上側によける（図 B.1）．

この式では b を正の実数に取った．一般に，b が純虚数でない限りは b の値を連続的に変化させるに伴って積分の径路も同時に極を飛び越えることが無いように連続的に変化されることでこの関数を定義することができる．

関数 $s_b(x)$ に対しても同様の式が成り立つ：

$$s_b(x) = \exp\left[\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{dw}{w}\left(\frac{\sin 2xw}{2\sinh(bw)\sinh(b^{-1}w)} - \frac{x}{w}\right)\right]. \tag{B.31}$$

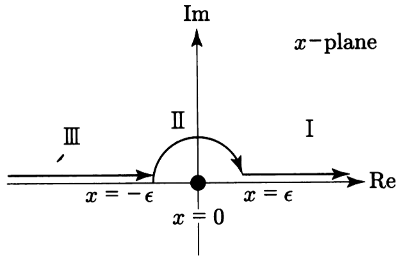


図 B.1　$e_b(x)$ の積分表示 (B.30) での積分径路．この積分径路を三つの部分 I ($x<0$)，II ($x=0$ の周りの半径 ϵ の半円)，III ($x>0$) に分割する．

以下ではこの二つの式について詳しく見ていこう*5)．

まず，(B.30) では条件 $|\mathrm{Im}(x)|<\frac{|\mathrm{Re}Q|}{2}$ により被積分関数 $w\to\pm\infty+i0$ の極限で指数関数的にゼロに近づくので，積分は well-defined である．

次に，(B.31) において積分の定義が危ないのは w の値が 0 及び無限大の周りである．まず，$w\sim 0$ では

$$\frac{2\sin xw}{2\sinh bw\sinh b^{-1}w}\sim\frac{2xw}{2(bw)(b^{-1}w)}\sim\frac{x}{w} \tag{B.32}$$

となり危険な $\frac{1}{w}$ の項は被積分関数でキャンセルする．また，$w\sim\infty$ では被積分関数は

$$\frac{1}{w}\frac{\sin 2xw}{2\sinh(bw)\sinh(b^{-1}w)}\sim\frac{1}{w}\frac{e^{-i2xw}}{\frac{e^{\pm bw}}{2}\frac{e^{\pm b^{-1}w}}{2}}\sim\frac{1}{w}e^{(-i2x\mp(b+b^{-1}))w} \tag{B.33}$$

(但し符号は Re(b) の符号による）となり $\int^{\infty}\frac{dw}{w}e^{-\alpha w}\sim\log\alpha$ よりやはり $|\mathrm{Im}(x)|<\frac{|\mathrm{Re}Q|}{2}$ のもとで発散はない．

まず，(B.30) と (B.31) が (B.22) と両立することを確認しよう．(B.30) の積分径路を三つにわける（図 B.1 参照)．$w<0$ のところでは

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{dw}{w}\frac{e^{-2ixw}}{\sinh bw\sinh b^{-1}w}=-\frac{1}{4}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w}\frac{e^{2ixw}}{\sinh bw\sinh b^{-1}w}\ . \tag{B.34}$$

これと $w>0$ の周りの寄与を合わせて

$$\begin{aligned}\mathrm{I}+\mathrm{III}&=-\frac{1}{4}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w}\frac{(e^{2ixw}-e^{-2ixw})}{\sinh bw\sinh b^{-1}w}\\&=\frac{1}{2i}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w}\frac{\sin 2xw}{\sinh bw\sinh b^{-1}w}\ .\end{aligned} \tag{B.35}$$

一方，$w=0$ の周りでの積分は，$w=\epsilon e^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$ と書くことで

$$\mathrm{II}=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(id\theta)\frac{e^{-2ix(\epsilon e^{i\theta})}}{\sinh(b\epsilon e^{i\theta})\sinh(b^{-1}\epsilon e^{i\theta})}\ . \tag{B.36}$$

これら全てを集めると，$\epsilon\to 0$ の極限で残るのは（演習問題 B.4），

*5)　以下の詳細はやや煩雑なので急ぎの読者は途中を飛ばして式 (B.39) まで進まれたい．

$$(\mathrm{B}.30) = \frac{1}{i}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w}\left(\frac{\sin 2xw}{2\sinh bw \sinh b^{-1}w} - \frac{x}{w}\right) - \frac{i\pi}{24}(2-Q^2) + \frac{i\pi}{2}x^2 \ . \tag{B.37}$$

ここで，既に述べたように被積分関数は $\epsilon \to 0$ でなめらかなので $\epsilon \to 0$ と取ることができ，その結果は (B.31) のもとで (B.22) を与える．

さて，次に式 (B.30) の積分を評価し，それが (B.21) を与えることを確認しよう．パラメーター b は複素数で $|q|, |\overline{q}| < 1$ を満たし，さらに $b \neq i\mathbb{R}$ としよう．積分は積分経路を閉じることで留数定理によって評価できる．既に述べた通り，(B.30) の積分経路は b が実数でないときは極を超えないように連続的に変形する．従って積分の評価のためにはまず b を実数に取り実軸上の積分を計算し，その結果を b について解析接続すればよい．積分経路を上に閉じるか下に閉じるかは $\mathrm{Re}(x)$ の値によって異なる．まず $\mathrm{Re}(x) < 0$ の時には積分経路は上に閉じることができ，極 $w = ib^{-1}m\pi$ 及び $w = ibn\pi$（但し $m, n > 0$）での留数を足し上げることにより

$$(\mathrm{B}.30) = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2b^{-1}\pi x n}}{(-1)^n \sinh(ib^{-2}\pi n)} + \frac{e^{2b\pi x n}}{(-1)^n\sinh(ib^2\pi n)}\right)\right] \ .$$

ここで

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{\alpha n}}{\sinh \beta n} = \begin{cases} -\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{\alpha-(2n-1)\beta}\right) & (\beta > 0 \text{ の時}) \ , \\ \log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{\alpha+(2n-1)\beta}\right) & (\beta < 0 \text{ の時}) \end{cases} \tag{B.38}$$

である（これを示すには，sinh を指数関数で展開して和の順序を取り換えればよい）ことを用いると，既に述べたように $\mathrm{Re}(x) < 0$ の時

$$e_b(x) = \begin{cases} \dfrac{(-qe^{2\pi bx}; q^2)_\infty}{(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^2)_\infty} & (|q|, |\overline{q}| < 1) \ , \\ \dfrac{(-\overline{q}^{-1}e^{2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^{-2})_\infty}{(-q^{-1}e^{2\pi bx}; q^{-2})_\infty} & (|q|, |\overline{q}| > 1) \ . \end{cases} \tag{B.39}$$

但し，(B.38) の二つの場合に応じて $|q|, |\overline{q}| > 1$ の場合についても式を書いておいた．

同様の議論を $\mathrm{Re}(x) > 0$ の時に実行することもできる．そのときは $w = 0$ からの留数も加わって

$$e_b(x) = \begin{cases} e^{i\pi x^2 - \frac{i\pi}{12}(2-Q^2)}\dfrac{(-\overline{q}e^{-2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^2)_\infty}{(-qe^{-2\pi bx}; q^2)_\infty} & (|q|, |\overline{q}| < 1) \ , \\ e^{i\pi x^2 - \frac{i\pi}{12}(2-Q^2)}\dfrac{(-q^{-1}e^{-2\pi bx}; q^{-2})_\infty}{(-\overline{q}^{-1}e^{-2\pi b^{-1}x}; \overline{q}^{-2})_\infty} & (|q|, |\overline{q}| > 1) \ . \end{cases} \tag{B.40}$$

これらの式は x の全複素平面上に解析接続される．

念のためこれらの式を $s_b(x)$ について書き直して整理しておこう．まず $|q|, |\overline{q}| < 1$ の時

$$\begin{aligned} s_b(x) &= e^{-\frac{i\pi}{2}x^2+\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(-qe^{2\pi bx};q^2)_\infty}{(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x};\overline{q}^2)_\infty} \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}x^2-\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(-\overline{q}e^{-2\pi b^{-1}x};\overline{q}^2)_\infty}{(-qe^{-2\pi bx};q^2)_\infty} \ . \end{aligned} \tag{B.41}$$

$|q|, |\overline{q}| > 1$ の時

$$\begin{aligned} s_b(x) &= e^{-\frac{i\pi}{2}x^2+\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x};\overline{q}^2)_\infty}{(-qe^{2\pi bx};q^2)_\infty} \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}x^2-\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} \frac{(-q^{-1}e^{-2\pi bx};q^{-2})_\infty}{(-\overline{q}^{-1}e^{-2\pi b^{-1}x};\overline{q}^{-2})_\infty} \ . \end{aligned} \tag{B.42}$$

極と零点

$e_b(z)$ 及び $s_b(z)$ の極の位置は，(B.21) から直ちに読み取れて

$$z = \frac{iQ}{2} + i(nb + mb^{-1}) \ , \quad n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ , \tag{B.43}$$

また零点の位置は

$$z = -\frac{iQ}{2} - i(nb + mb^{-1}) \ , \quad n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{B.44}$$

で与えられる．ここで (B.21) の分子からくる零点のうちおおよそ半分は分子から来る極とキャンセルするので注意が必要である．この極と零点の位置より $s_b(z)$ は無限積

$$\prod_{m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{mb + nb^{-1} + \frac{Q}{2} - iz}{mb + nb^{-1} + \frac{Q}{2} + iz} \tag{B.45}$$

の正則化と看做せる．

この無限積は S^3 分配関数の 1 ループ行列式の計算に現れるものであり，その文脈では整数 m, n は S^3 上の異なるモード（球面調和関数）のうちボソンとフェルミオンとでキャンセルしなかったモードにわたる積を表している．

なお，(B.45) は $s_b(x)$ が**バーンズ二重ガンマ関数**（**Barnes double gamma function**）$\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2)$[222] の比で書けることを表している：

$$s_b(x) = \frac{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2} + ix|b, b^{-1}\right)}{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2} - ix|b, b^{-1}\right)} \ , \tag{B.46}$$

$$\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \prod_{m,n\geq 0} (x + m\epsilon_1 + n\epsilon_2)^{-1} \ . \tag{B.47}$$

ここで $\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2)$ をより正確に定義するには，バーンズ二重ゼータ関数（Barnes double zeta function）$\zeta_2(s, x|\epsilon_1, \epsilon_2)$ を

$$\zeta_2(s,x|\epsilon_1,\epsilon_2) := \sum_{m,n\geq 0} (x+m\epsilon_1+n\epsilon_2)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^s \frac{e^{-tx}}{(1-e^{-\epsilon_1 t})(1-e^{-\epsilon_2 t})} \tag{B.48}$$

で定義した後，$\Gamma_2(x|\epsilon_1,\epsilon_2)$ を

$$\Gamma_2(x|\epsilon_1,\epsilon_2) := \exp \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \zeta_2(s,x|\epsilon_1,\epsilon_2) \tag{B.49}$$

で定義すればよい．バーンズ二重ガンマ関数はリウビユ理論の共形ブロック（第 6.3.3 節参照）や 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のネクラソフ分配関数（第 5.2.4 節参照）にも現れ，応用上重要である．

定義 (B.47)，(B.49) は (B.31) と多少異なった定義を与えるが，それらは等価である．参考までにこのことを説明しておこう（[223] も参考になる）．まず，多重ベルヌーイ多項式の定義 (B.25) を使って

$$\frac{e^{-xt}}{(1-e^{-\epsilon_1 t})(1-e^{-\epsilon_2 t})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{n!} B_{2,n}(\epsilon_1+\epsilon_2-x+1;\epsilon_1,\epsilon_2)\, e^{-t} \tag{B.50}$$

と展開しよう．これが t について非正のべきを持つのは $n=0,1,2$ の時のみである．これを先の式に代入すると，各 n に対して

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^s t^{n-2} e^{-t} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{\Gamma(s+n-2)}{\Gamma(s)} \tag{B.51}$$

を評価する必要があるが，これは $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ を用いて

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{\Gamma(s+n-2)}{\Gamma(s)} = \begin{cases} \frac{3}{4} & n=0\,, \\ -1 & n=1\,, \\ 0 & n=2\,, \\ \Gamma(n-2) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{n-2} e^{-t} & n\geq 3 \end{cases} \tag{B.52}$$

と計算できる．特に $n\geq 3$ の時は結局 (B.51) で $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}$ を忘れて単に $s=0$ とすればよい．従って，展開 (B.50) において $n=0,1,2$ の部分のみ (B.52) を用いて評価し，残りは $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}$ を忘れて単に $s=0$ とすればよい．このことより，

$$\begin{aligned} \log\Gamma_2(x|b,b^{-1}) &= \frac{3}{4} - \frac{2+Q-2x}{2} \\ &+ \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, e^{-t} \bigg[e^{(x-1)t}(1-e^{bt})(1-e^{b^{-1}t}) - \frac{1}{t^2} - \frac{2+Q-2x}{2t} \\ &\qquad - \frac{7+6Q+Q^2-12x-6Qx+6x^2}{12} \bigg] \,. \end{aligned} \tag{B.53}$$

従って

$$\begin{aligned} &\log \frac{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2}+ix|b,b^{-1}\right)}{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2}-ix|b,b^{-1}\right)} \\ &= 2xi - 2i\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\sin(xt)}{\sinh(\frac{bt}{2})\sinh(\frac{b^{-1}t}{2})} - e^{-t}x\left(\frac{1}{t}+1\right) \right] \,. \end{aligned} \tag{B.54}$$

ここで

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{t} - e^{-t}\left(\frac{1}{t}+1\right)\right) = 1 \tag{B.55}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\log \frac{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2}+ix|b,b^{-1}\right)}{\Gamma_2\left(\frac{Q}{2}-ix|b,b^{-1}\right)} \\ = 2xi - 2i\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left[\frac{\sin(xt)}{\sinh(\frac{bt}{2})\sinh(\frac{b^{-1}t}{2})} - \frac{x}{t}\right] .\end{aligned} \tag{B.56}$$

積分で $t=2w$ と積分変数を置き換えると先の定義式 (B.31) と一致する．

反転公式

$e_b(x)$ 及び $s_b(x)$ は b と b^{-1} の入れ替えに対し不変である：

$$e_b(x) = e_{b^{-1}}(x) , \quad s_b(x) = s_{b^{-1}}(x) . \tag{B.57}$$

この入れ替えは S_b^3 の持つ対称性，さらには量子群の**モジュラー・ダブル**（**modular double**）と呼ばれる代数構造[224]を反映している．

(B.57) は (B.30)，(B.31) では自明であるが無限積表示 (B.21)，(B.22) からは明らかではないことに注意しよう．

$(x;q)_\infty, e_b(x), s_b(x)$ の三つの関数は本質的に同じ漸化式 (B.10)，(B.29) を満たす．しかし，関数 $(x;q)_\infty$ は性質 (B.57) を持たないことに注意しよう．この意味で $s_b(z), e_b(z)$ は $(x;q)_\infty$ を $b\to b^{-1}$ のもとで対称になるように拡張したものであると考えることができる．

漸近形

式 (B.31) 及び (B.22) からは次も自明に従う：

$$e_b(x)e_b(-x) = e^{i\pi x^2 - \frac{i\pi}{12}(2-Q^2)} , \quad s_b(-x)s_b(x) = 1 . \tag{B.58}$$

引数が（実軸方向）無限遠方にいったとき漸近形は (B.41)，(B.42) から直ちに導かれ

$$s_b(x) \to \begin{cases} e^{\frac{i\pi x^2}{2}} e^{-\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} & (x\to\infty) , \\ e^{-\frac{i\pi x^2}{2}} e^{\frac{i\pi}{24}(2-Q^2)} & (x\to-\infty) . \end{cases} \tag{B.59}$$

$b=1$ 極限

量子ダイログ関数は $b\to 0$ あるいは $b\to\infty$ の半古典極限で古典ダイログ関数に帰着した．b が有限の量子的なパラメーター領域でも $b=1$ の時は特別であり，量子ダイログ関数は古典的なダイログ関数と直接に関係する（この式の

導出は演習問題 B.7 を見よ）：

$$\log e_{b=1}(x) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Li}_2(e^{2\pi x}) + ix\log(1-e^{2\pi x}) \ . \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned}\log s_{b=1}(x) = &\frac{i}{2\pi}\mathrm{Li}_2(e^{2\pi x}) + ix\log(1-e^{2\pi x}) \\ &- \frac{i\pi}{2}x^2 - \frac{i\pi}{12} \ .\end{aligned} \tag{B.61}$$

$b=1$ の場合は 3 次元の F 定理やエンタングルメントエントロピー等と関連して応用上重要である．なお，S^3 分配関数についての文献 [58] では $\log s_{b=1}(ix)$ は $l(x)$ と記されている．

ペンタゴン恒等式

量子ダイログ関数のもっとも重要な性質に**ペンタゴン恒等式**（**五項恒等式，pentagon identity**）がある．交換関係 $[\hat{P},\hat{Q}] = \frac{1}{2\pi i}$ を満たす二つの演算子 $\hat{P},\hat{Q}$ を用意しよう．このとき，量子ダイログ関数は次の恒等式を満たす：

$$e_b(\hat{P})e_b(\hat{Q}) = e_b(\hat{Q})e_b(\hat{P}+\hat{Q})e_b(\hat{P}) \ . \tag{B.62}$$

この式は q-ポッホハンマー記号に対するペンタゴン恒等式 (B.15) 及び $e_b(x)$ の定義式 (B.21) から示すことができる．この等式は付録 C の言葉では A_1 型の箙の二通りのミューテーションに対応する量子ダイログ恒等式である．

この恒等式は演算子に対して成り立つ式であるが，期待値を取ることで c–数についての恒等式に書き直すことができる（演習問題 B.10）．その結果得られる等式は

$$\begin{aligned}&\int d\sigma\, e^{2\pi i\zeta\sigma} s_b\,(\sigma+r)\, s_b\,(-\sigma-s) \\ &\quad = e^{-\frac{i\pi}{12}(1+Q^2)} e^{-\pi i\zeta(r+s)} s_b\left(\zeta - \frac{r}{2} + \frac{s}{2} + \frac{iQ}{2}\right) \\ &\qquad \times s_b\left(-\zeta - \frac{r}{2} + \frac{s}{2} + \frac{iQ}{2}\right) s_b\left(r - s - \frac{iQ}{2}\right) \ .\end{aligned} \tag{B.63}$$

ここではこれも**ペンタゴン恒等式**（**五項恒等式，pentagon identity**）と呼ぶ．上の式は特に**積分ラマヌジャン恒等式**（**integral Ramanujan identity**）と呼ばれることもある．

フーリエ変換

(B.63) から極限を取ることで関数 $e_b(z)^{\pm 1}$ のフーリエ変換の公式が導かれる[225]（演習問題 B.11）：

$$
\begin{aligned}
&\int dx\, e_b(x)\, e^{2\pi i w x} = e^{-i\pi w^2 + \frac{i\pi}{12}(1+Q^2)}\, e_b\left(w + i\frac{Q}{2}\right) , \\
&\int dx\, e_b(x)^{-1}\, e^{2\pi i w x} = e^{i\pi w^2 - \frac{i\pi}{12}(1+Q^2)}\, e_b\left(-w - i\frac{Q}{2}\right)^{-1} , \\
&\int dx\, s_b(x)\, e^{\frac{i\pi}{2}x^2 + 2\pi i w x} \\
&\qquad = e^{-\frac{i\pi}{2}\left(w - \frac{iQ}{2}\right)^2 - \frac{i\pi}{12}(2Q^2-1)}\, s_b\left(w + i\frac{Q}{2}\right) , \\
&\int dx\, s_b(x)^{-1}\, e^{-\frac{i\pi}{2}x^2 + 2\pi i w x} \\
&\qquad = e^{\frac{i\pi}{2}\left(w - \frac{iQ}{2}\right)^2 + \frac{i\pi}{12}(2Q^2-1)}\, s_b\left(-w - i\frac{Q}{2}\right)^{-1} .
\end{aligned}
\tag{B.64}
$$

演習問題

B.1 [♦]（古典ダイログ恒等式）古典ダイログ恒等式 (B.3), (B.5) を示せ.（ヒント：等式が引数の特殊値 $x=0$ 及び $y=0$ で成立すること，また x と y について微分した式が成り立つことを確認すればよい．古典ダイログ恒等式の多くはこの方法で証明できる.）

B.2 [♦]（$(x;q)_\infty$ の $q \to 1$ 極限）q-ポッホハンマー記号 $(x;q)_\infty$ の $q \to 1$ での漸近展開 (B.12) を証明せよ.（ヒント：まず，$(qx;q)_\infty$ の無限積展開を指数関数の肩にあげて無限積に書き直すとリーマン和の形になっている．ここにオイラー＝マクローリン（Euler-Maclaurin）の公式

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=M}^{N} f(m) = &\int_M^N f(t)dt + \frac{1}{2}(f(N)+f(M)) \\
&+ \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(N) - f^{(2k-1)}(M)\right) \\
&- \int_M^N \frac{B_{2p}(t-[t])}{(2p)!} f^{(2p)}(t)dt
\end{aligned}
\tag{B.65}
$$

を適用する．最後の項（剰余項）において $B_{2p}(t)$ はベルヌーイ多項式（$B_k(0)=B_k$, (B.25) を参照)，$t-[t]$ は t の分数部分である．計算には多重対数関数 $\mathrm{Li}_s(x)$ (B.14) に対する関係式

$$
\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x) , \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Li}_s(e^x) = \mathrm{Li}_{s-1}(e^x)
\tag{B.66}
$$

を利用する.）

B.3 [♦]（$(x;q)_\infty$ のペンタゴン恒等式）q-ポッホハンマー記号に対するペンタゴン恒等式 (B.15) の半古典極限を取ることで古典ダイログ関数に対するペンタゴン恒等式 (B.3) を示せ.

B.4 [♦]（$e_b(x)$ と $s_b(x)$ の関係の導出）(B.36) を $\epsilon \to 0$ で評価し本文中での積分 (B.37) を導出せよ.

B.5 [♦]（$e_b(x), s_b(x)$ の漸化式）本文では漸化式 (B.29) を無限積表示 (B.21), (B.22) から求めた．そこで，今度は積分表示 (B.30), (B.31) から漸化式 (B.29) を直接導け.

B.6 [♦]（無限積表示の等価性）式 (B.41), (B.42) は二つの無限積表示の等価性の主

張を含むことに注意したい：

$$\begin{aligned}&(-qe^{2\pi bx};q^2)_\infty(-qe^{-2\pi bx};q^2)_\infty \\ &\quad = e^{i\pi x^2-\frac{i\pi}{12}(2-Q^2)}(-\overline{q}e^{2\pi b^{-1}x;\overline{q}^2})_\infty(-\overline{q}e^{-2\pi b^{-1}x;\overline{q}^2})_\infty\ .\end{aligned} \tag{B.67}$$

このことを直接確認せよ．

（ヒント：テータ（theta）関数及びデデキントエータ（Dedekind eta）関数

$$\theta_{01}(x|q):=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\left(1-2\cos(2\pi x)q^{2m-1}+q^{4m-2}\right)\ , \tag{B.68}$$

$$\eta\left(\frac{\log q}{2\pi i}\right):=e^{\frac{\log q}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{B.69}$$

を用いて (B.67) を書き直すと

$$\frac{\eta(-b^{-2})}{\eta(b^2)}=e^{i\pi x^2}\frac{\theta_{01}(-ib^{-1}x|\overline{q})}{\theta_{01}(-ibx|q)} \tag{B.70}$$

となる．これは $\eta(q)$ 及び $\theta_{01}(x|q)$ のモジュラー変換

$$\frac{\eta(-b^{-2})}{\eta(b^2)}=\sqrt{-ib^2}\ ,\quad \frac{\theta_{01}(\frac{x}{b^2};\overline{q})}{\theta_{01}(x;q)}=\sqrt{-ib^2}e^{\frac{i\pi x^2}{b^2}} \tag{B.71}$$

から直ちに従う．）

B.7 [♦]（$e_b(x), s_b(x)$ の $b=1$ 特殊化）$e_{b=1}(x)$ 及び $s_{b=1}(x)$ の式 (B.61) を導け．

（ヒント：$e_b(x)$ の積分表式 (B.30) で $b=1$ としたあと，積分径路を閉じて留数定理を用いよ．この計算は前に述べた (B.30) から (B.21) を導く計算と同様であるが，$b=1$ の時は複数の 1 次の極が衝突し 2 次の極になるので留数計算が変更を受ける．より一般に，b を有理数に取ると $s_b(x)$ 及び $e_b(x)$ は古典ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ で表されることが知られている[226], [227]．）

B.8 [♦]（$e_b(x)$ のペンタゴン恒等式）量子ダイログ関数 $e_b(x)$ のペンタゴン恒等式 (B.62) を証明せよ．（ヒント：(B.15)，(B.21) を使う．）

B.9 [♦]（ペンタゴン恒等式の半古典極限）半古典極限 $b\to 0$ で量子ダイログ恒等式（但し，(4.39) の形を使うものとする）は古典ダイログの恒等式 (B.3) に帰着することを次のようにして示せ．

(a) まず，$b\to 0$ の極限で

$$\Sigma:=e^{2\pi b\sigma}\ ,\quad Z:=e^{2\pi b\zeta}\ ,\quad M:=e^{2\pi b\mu} \tag{B.72}$$

で定義される Σ, Z, M を有限に保つことにする．これは第 4.4.4 節で 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の次元還元を考える際に自然なスケールの仕方であった．関数 $s_b(z)$ の古典極限 (B.27) を用いると*6)

$$\begin{aligned}&\int d\Sigma\ \exp\left[\frac{1}{2\pi ib^2}\mathcal{W}_1(\Sigma,Z,M)+\mathcal{O}(b^0)\right] \\ &\qquad = \exp\left[\frac{1}{2\pi ib^2}\mathcal{W}_2(Z,M)+\mathcal{O}(b^0)\right]\ .\end{aligned} \tag{B.73}$$

但し $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ は 2 次元でのツイステッド・スーパーポテンシャルにあたるものであり，その具体形は

*6) 積分変数 σ を Z で取り替えることからくる寄与は b の展開について高次である．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_1(\Sigma,Z,M) =& -\log Z\log\Sigma + \mathrm{Li}_2\left(\frac{\Sigma}{M}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{\Sigma M}\right) \\
&+ \frac{1}{2}(\log\Sigma)^2 + \frac{1}{2}(\log M)^2 - i\pi\log M - \frac{\pi^2}{3}\ , \\
\mathcal{W}_2(Z,M) =& \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{M^2}\right) + \mathrm{Li}_2(-MZ) + \mathrm{Li}_2\left(-\frac{M}{Z}\right) \\
&+ \frac{3}{2}(\log M)^2 + \frac{1}{2}(\log Z)^2 - i\pi\log M
\end{aligned}
\tag{B.74}
$$

で与えられる．

(b) さて，積分を鞍点近似で評価しよう．そのためには Σ についての鞍点を求める：

$$
\exp\left(\frac{\partial\mathcal{W}_1(\Sigma,Z,M)}{\partial\Sigma}\right) = 1 \longrightarrow \Sigma = \frac{1+MZ}{M+Z}\ . \tag{B.75}
$$

これを代入すると得られる等式は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_1\Big|_{\text{鞍点}} =& \mathrm{Li}_2\left(\frac{1+MZ}{M(M+Z)}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{M+Z}{M(1+MZ)}\right) \\
&- \log Z\log\frac{1+MZ}{M+Z} + \frac{1}{2}\left(\log\frac{1+MZ}{M+Z}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\log M)^2 - i\pi\log(M) - \frac{\pi^2}{3}\ .
\end{aligned}
\tag{B.76}
$$

(c) 上で求めた $\mathcal{W}_1\Big|_{\text{鞍点}}$ を $\mathcal{W}_2$ と等しいと置き，ロジャーダイログ関数 (B.2) を用いて整理すると

$$
\begin{aligned}
&L\left(\frac{1}{M^2}\right) + L(-MZ) + L\left(-\frac{M}{Z}\right) - L\left(\frac{1}{M}\frac{1+MZ}{M+Z}\right) - L\left(\frac{1}{M}\frac{M+Z}{1+MZ}\right) \\
&+ \frac{\pi^2}{3} + \frac{i\pi}{2}\log\left(\frac{Z(1+MZ)}{M+Z}\right) = 0\ .
\end{aligned}
\tag{B.77}
$$

ここで

$$
x = \frac{1}{M}\frac{1+MZ}{M+Z}\ ,\quad y = \frac{1}{M}\frac{M+Z}{1+MZ}\ , \tag{B.78}
$$

$$
u = \frac{x(1-y)}{1-xy}\ ,\quad v = \frac{y(1-x)}{1-xy} \tag{B.79}
$$

と定義すると，

$$
\begin{aligned}
&L(xy) + L\left(1-u^{-1}\right) + L\left(1-v^{-1}\right) - L(x) - L(y) \\
&\quad + \frac{\pi^2}{3} + \frac{i\pi}{2}\log\left(\frac{Z}{(1+MZ)(M+Z)}\right) = 0\ .
\end{aligned}
\tag{B.80}
$$

最後に，

$$
L(1-x) + L(x) = \frac{\pi^2}{6}\ , \tag{B.81}
$$

$$
L\left(\frac{1}{x}\right) + L(x) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{i\pi}{2}\log(x)\ , \tag{B.82}
$$

そして従って

$$
L(1-x^{-1}) = L(x) - \frac{\pi^2}{6} + \frac{i\pi}{2}\log(x) \tag{B.83}
$$

であることを用いると，(B.80) は

$$L\,(xy) + L\,(u) + L\,(v) - L\,(x) - L\,(y) = 0 \tag{B.84}$$

となり，古典ダイログ関数のペンタゴン恒等式 (B.3) と一致することが確認できる．

B.10 [♦]（二つのペンタゴン恒等式の関係）演算子版のペンタゴン恒等式 (B.62) の期待値を取ることで，c–数版のペンタゴン恒等式 (B.63) が得られることを示せ．

B.11 [♦]（$e_b(x)$ のフーリエ変換）(B.63) から出発し，$\zeta \to \zeta - \frac{s}{2}$ とずらしたのちに $r = 0, s \to -\infty$ とし (B.64) の第 3 式を導出せよ．そこから第 1 式が直ちに従う．同様の方法で第 2 式と第 4 式も導出できる．

付録 C
クラスター代数瞥見

本付録ではクラスター代数についての必要最小限の数学的事実をまとめる．本文で現れた多くの構造，例えばタイヒュミュラー理論のフォック変数とその量子化，フリップのもとでの変換則等はクラスター代数の一般論の特殊例であると看做すことができ，クラスター代数の立場から眺めると見通しが良くなる．

C.1 箙とミューテーション

本付録では**クラスター代数**（**団代数**，**cluster algebra**）[228]の数学的部分について簡単にまとめておく．クラスター代数は近年様々な分野においてその重要性を増しつつある数学的構造であり（レビューとしては例えば [229] を参照，また最近の数理物理における話題の一端を知るためには [230], [231] も参考になる），本書の内容，特に 2 次元双曲幾何，2 次元タイヒュミュラー理論及び 3 次元双曲幾何の背後に存在する構造である（2 次元双曲幾何との関連については [232], [233] を，3 次元双曲幾何とは [234] をそれぞれ参照せよ）．さらに，クラスター代数は第 10 章でごく簡単に触れられたように，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を定義するデータとしても用いることができる．

まず，手始めに**箙**（**quiver**）を考えることにする．ここで箙とは有向グラフでその辺に向きが付けられたものである．本書ではゲージ理論を定義するデータとして現れた（図 2.1）．

箙の頂点の集合を I，その元を $i, j, \ldots \in I$ と書く．技術的な要請のため，箙にはループ及び向きづけられた2-サイクルは存在しないとする（図 C.1）*1)．この条件は，第 8 章で議論した量子タイヒュミュラー空間の例では満たされることに注意しよう．

箙 Q が与えられたとき，行列 $Q=(Q_{i,j})_{i,j\in I}$ を*2)

*1) 実際の応用例ではこの条件が満たされていないことも起こるので注意が必要である．
*2) ここでは簡単のため箙と行列に同じ記号を用いる．

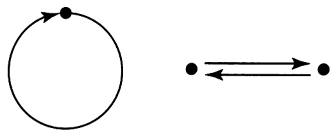


図 C.1　ループ（左）及び向きづけられた 2-サイクル（右）が存在しないと仮定する．

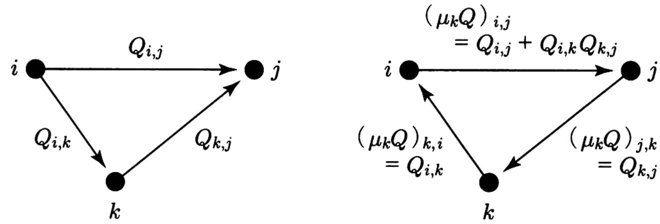


図 C.2　頂点 k の周りでの箙のミューテーション (C.2) を示したもの．ここでは $Q_{i,k}, Q_{k,j}, Q_{i,j} > 0$ とした．

$$Q_{i,j} := \sharp\{i \text{ から } j \text{ への矢印}\} - \sharp\{j \text{ から } i \text{ への矢印}\} \tag{C.1}$$

により定義しよう．つまり，$Q_{i,j}$ は頂点 i から頂点 j への矢印の数を符号付きで数えたものである．図 C.1 の仮定のもとで，箙 Q は行列 $Q_{i,j}$ によって完全に決定されることに注意しよう．

箙の頂点 k に対し，その頂点でのミューテーション（**変異，mutation**）μ_k とは，箙 Q を新しい箙 $\mu_k Q$ で置き換える操作である．但し，$\mu_k Q$ は次のようにして定義される（図 C.2）：

$$(\mu_k Q)_{i,j} := \begin{cases} -Q_{i,j} & (i = k \text{ または } j = k) , \\ Q_{i,j} + [Q_{i,k}]_+ [Q_{k,j}]_+ - [Q_{j,k}]_+ [Q_{k,i}]_+ & (i, j \neq k) . \end{cases} \tag{C.2}$$

ここで $[x]_+ := \max(x, 0)$ と定義した．

箙の変異 (C.2) のもっとも直接的なゲージ理論的な解釈は，2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 理論の文脈で与えられる*3)：箙を 2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 箙ゲージ理論の定義データと看做すと（その定義は第 1 章での 4 次元の箙ゲージ理論の定義と同様），箙とその変異にそれぞれ対応する 2 次元 $\mathcal{N} = (2,2)$ 理論は双対であり，繰り込み群のフローのもとで同じ赤外固定点に流れ込むのである[67], [207]．

C.1.1　補足：BPS 箙の物理的意味

本付録は基本的に数学的な意味をまとめることを目的にしているが，物理を学ぶ上ではその物理的意味が重要である．そこで箙とそのミューテーションが，4 次元 $\mathcal{N} = 2$

*3)　第 1 章で触れた 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 理論のザイバーグ双対[28] も同様の箙の変異を引き起こす（演習問題 C.4）が，アノマリーの制限から頂点のゲージ群のランクに制限が付く．

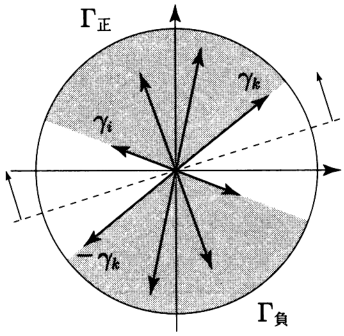


図 C.3　チャージのなす集合 Γ を Z_γ の偏角に応じて正負に分割する．

理論において自然な解釈を持つことを説明しておこう．

本書でも考えたような 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論，そしてそのクーロンブランチを考えよう（第 6.3.2 節参照）．ここで，理論のスペクトラムを調べることにしよう．つまり，どういうチャージを持った安定な粒子が，幾つ存在するかを考えるのである．$\mathcal{N}=2$ 超対称性からの制限を最大限に活用するために，特に $\mathcal{N}=2$ 超対称性のうちの最大限（今の場合は半分の）超対称性を保つ粒子のみを考えることにしよう．このような粒子のことを **BPS 粒子（BPS particle）**（今の場合は正確には 1/2-BPS 粒子）と呼ぶ．

BPS 粒子の特徴として，チャージ γ を持つ BPS 粒子の質量は，そのチャージから定まる複素数 Z_γ（**セントラルチャージ（中心荷電，central charge）**）の絶対値 $|Z_\gamma|$ で決まる[*4]．一方，Z_γ の位相部分は，$\mathcal{N}=2$ 超対称性のうちどの $\mathcal{N}=1$ 超対称性を保つかを指定している．さらに，Z_γ は，γ に対して線形である：$Z_{\gamma_1+\gamma_2}=Z_{\gamma_1}+Z_{\gamma_2}, Z_{n\gamma}=nZ_\gamma$．

クーロンブランチでは破れずに残った可換ゲージ群 $U(1)^r$ が存在するので，粒子はそのゲージ群についてのチャージ $\gamma\in\Gamma$ を持つ．ここで Γ は許されるチャージの全体であり，完全反対称ペアリングを持ちそのもとでディラック量子化条件を満たす．

我々は相対論的な局所場の理論から出発しているので，CPT 定理が成立し，特にチャージ γ を持つ粒子が存在すれば，逆のチャージ $-\gamma$ を持つ反粒子も存在しなければならない．従って，粒子を数え上げる時には二つのうちどちらか一方だけを考えてやればよく，Γ は二つの交わりを持たない和に分解する：

$$\Gamma=\Gamma_{正}\cup\Gamma_{負}\ . \tag{C.3}$$

より実際的には，先に導入した複素数 Z_γ が複素平面上で偏角が $[\zeta,\zeta+\pi]$ にあるものを集めて $\Gamma_{正}$ とすればよい（図 C.3）：

$$\gamma\in\Gamma_{正}\longleftrightarrow \mathrm{Im}(e^{-i\zeta}Z(\gamma))>0\ . \tag{C.4}$$

但し，ここである偏角 ζ を固定した．後からさらにコメントするように，$\Gamma_{正}$ の定義は偏角 ζ の値に明白に依存することに注意しよう．

さて，ここから箙を定義しよう．$\Gamma_{正}$ を生成する基底を $\{\gamma_i\}$ としよう：[*5]

---

*4）セントラルチャージは第 3.1.1 節にも現れたが，そのときは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考えていた．一般に $\mathcal{N}>1$ 超対称性の時には超対称代数にセントラルチャージが現れる．但し，それが複素数であるか実数であるかは次元や超対称性の数に依存する．

*5）このような基底が存在するかどうかは明らかではない．例えば $\mathcal{N}=4$ 理論はそのような有限な基底を持たない．

$$\Gamma_{\text{正}} = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_i \ . \tag{C.5}$$

このとき,

$$Q_{ij} := \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle \tag{C.6}$$

により反対称行列 $Q = (Q_{i,j})$ を,従って箙を定義するのである.この箙を **BPS 箙**（**BPS quiver**）と呼ぶことにしよう.既に述べたようにペアリングは反対称であったから,Q_{ij} も反対称行列を与えることに注意されたい.また,$Q_{i,j}$ が整数であることはディラック量子化条件の帰結である.

(C.6) 式の定義はやや天下りだが,その背後にはちゃんと物理的意味がある.BPS 粒子は 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論（8 個の超対称チャージを持つ）の超対称ゲージ理論の中に存在する粒子であるが,それ自体半分の超対称性を保っている.従って,その粒子の上にいる人の立場に立てば,$\mathcal{N} = 4$ を持つ超対称量子力学が現れたように見える（粒子に対する場の理論は量子力学である）.先に定義した箙はこの超対称量子力学（**箙超対称力学**）の定義データを与えるのである.

具体的には次のようにすればよい：箙の頂点にはチャージ上で定義した基底の一つの元 γ_i が対応する.$\gamma = \sum_i n_i \gamma_i$ なるチャージを考えた時には i 番目の頂点にはゲージ群 $U(n_i)$ を考え,二つの頂点 i から出て j までを結ぶ辺には,$U(n_i) \times U(n_j)$ のもとで $(n_i, \bar{n}_j)$ として変換するバイファンダメンタル場（第 2.1.2 参照）を対応させる*6)*7).バイファンダメンタル表現に従う場の数は箙によって与えられる：

$$Q_{i,j} := \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle \ . \tag{C.7}$$

これは 4 次元理論にどのようなチャージを持つ粒子が存在するかを示したものであり,BPS 箙と呼ばれる有向グラフを与える.

リーマン面 Σ に付随した 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論の場合には,その BPS 箙は,Σ の理想三角形分割から図 8.4 のようにして構成される箙と一致すると考えられている*8).さらに,箙の辺にはフォック変数が対応していたが,これは今の議論より 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論のチャージを持っており,第 8.1.4 節での議論（フォック変数をループ演算子の期待値と同一視）とうまくマッチする[236].

箙とその物理的意味を説明してきたが,ここまでの説明には不満足な点がある.それは,正と負のチャージへの分割が一意ではないということだ.このことは (C.4) 式が偏角 ζ に依存することからも明らかである.特に,変化が起こるのは ζ が基底のある元 γ_k の偏角を越えて変化すると,$\Gamma_{\text{正}}$ が,従って箙が変化する（図 C.4).

それまで正のチャージを持っていた γ_k が負のチャージを持つようになったとしよう.このとき,明らかに $-\gamma_k$ を新たな基底に加えなければならない:

$$\gamma_k \to -\gamma_k \ . \tag{C.8}$$

---

*6) 正確にはスーパーポテンシャルにより相互作用も指定する必要がある.

*7) 超対称量子力学の真空のモジュライ空間は数学的にはポテンシャル付き箙の安定な表現のなすモジュライ空間であり,箙多様体（quiver variety）と近い関係にある.

*8) なお,こうして構成された箙は,ミューテーションを繰り返しても有限の箙しか得られない.この条件を満たす箙を有限型箙と呼び,数学的な分類が知られている.この条件のゲージ理論解釈については [235] を参照せよ.

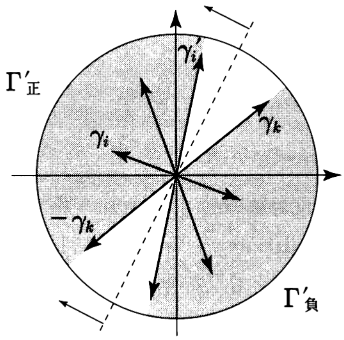


図 C.4　ζ の値を変化させることでチャージの正負への分割が変化する．このとき，$\Gamma_{正}$ の基底も取り替える必要がある．

しかし，(C.5) を保つ必要があるので他の基底の元も取り替える必要がある．その結果は

$$\gamma_i \to \gamma_i + [Q_{ki}]_+ \gamma_k \tag{C.9}$$

であることが知られている．この変換則 (C.8) 及び (C.9) により定義されたものを ***c*–ベクトル**（***c*-vector**）と呼ぶ．c–ベクトルはチャージベクトルだったのである*9)．この変換則と (C.7) から，先に述べた箙の変換則 (C.2) を直ちに導くことができる（演習問題 C.3）．

(C.9) の証明はここでは行わないが，例えば箙の表現論の立場から [237] の section 3.1.2 を参照されたい．

本節の議論は駆け足で詳細を完全に説明する余裕はなかったが，少なくとも様々なピースがうまくはまっていることは感じていただけたのではと思う．

C.2　クラスター x，y 変数及びその量子化

C.2.1　古典論

量子タイヒュミュラー理論では写像類群の作用があったが，一般のクラスター代数において代わりをするのはミューテーションの列である．頂点の列 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_L)$ より指定されるミューテーションの列 $\mu_{\boldsymbol{k}} = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_L})$ を考えよう．これは箙の「時間発展」を表しており，時刻 t での箙は

$$Q(t) := \hat{\mu}_{k_t}\hat{\mu}_{k_{t-1}} \cdots \hat{\mu}_{k_1} Q \ , \quad Q(0) := Q \ . \tag{C.10}$$

クラスター変数を，初期値 $x_i(t=0) := x_i$ 及び $y_i(t=0) := y_i$ から出発して，

$$x_i(t+1) := \frac{\prod_{j\in I} x_j^{[Q(t)_{i,j}]_+} + \prod_{j\in I} x_j(t)^{[Q(t)_{j,i}]_+}}{x_i(t)} \tag{C.11}$$

*9)　チャージ（charge）の頭文字 c が c–ベクトルの名前と一致するのは多分偶然である．

及び

$$y_i(t+1) := \begin{cases} y_k(t)^{-1} & (i=k)\ , \\ y_i(t)\, y_k(t)^{[Q(t)_{k,i}]_+} (1+y_k(t))^{-Q(t)_{k,i}} & (i \neq k) \end{cases} \tag{C.12}$$

により順に定義する*10).

ある箙から出発したとき，このように箙のミューテーションを繰り返して得られる $x_i(t)$ 及び $y_i(t)$ の全体をそれぞれ**クラスター x 変数（cluster x-variable）** 及び**クラスター y 変数（cluster y-variable）** と呼び，特に前者によって生成される代数のことをクラスター代数と呼ぶ.

クラスター変数の呼び方には，x 変数を $\mathcal{A}$ 変数．y 変数を $\mathcal{X}$ 変数と呼ぶ流儀[195]もあり，特に x 変数は $\mathcal{X}$ 変数と同じではない*11)ので注意が必要である．y 変数は歴史的にはクラスター変数の**係数（coefficient）** と呼ばれることもある.

第 8 章でのタイヒュミュラー理論では，ペナー変数がクラスター x 変数に，フォック変数がクラスター y 変数にあたることに注意しよう.

C.2.2 量子論

さて，クラスター変数の量子化を考えよう[238],[239]．量子化の流儀には複数のものがあり等価ではないが，以下では y 変数のみの量子化を議論する.

クラスター y 変数を量子化するには，変数を演算子（**量子クラスター y 変数（quantum cluster y-variable）**）$\{\hat{y}_i\}_{i\in I}$ に置き換え，交換関係

$$\hat{y}_j \hat{y}_i = q^{2Q_{i,j}} \hat{y}_i \hat{y}_j\ . \tag{C.14}$$

を設定すればよい．この $\{\hat{y}_i\}_{i\in I}$ により生成される代数（を必要ならば適切に完備化したもの）を $\mathcal{A}_Q$ と書く.

$\hat{y}_i = e^{\hat{Y}_i}$ で定義される変数を用いれば交換関係 (C.14) は

$$[\hat{Y}_i, \hat{Y}_j] = 2\sqrt{-1}\,\hbar\, Q_{i,j}, \quad q = e^{\sqrt{-1}\,\hbar} \tag{C.15}$$

となる．これは反対称行列 $Q_{i,j}$ を古典力学のポアソン括弧と看做すと，(C.14) は有限次元の古典力学の相空間の量子化に他ならず，偏極を選び適切な位置・運動量座標を選ぶことで容易に量子化できる．こうしてヒルベルト空間 $\mathcal{H}_Q$ が構成され，代数 $\mathcal{A}_Q$ はそのヒルベルト空間に演算子として作用する.

---

*10) (C.12) の $i \neq k$ の時の式は，よりはっきりと

$$y_i(t+1) := \begin{cases} y_i(t)\,(1+y_k(t)^{-1})^{-|Q(t)_{k,i}|} & (Q(t)_{k,i} \geq 0)\ , \\ y_i(t)\,(1+y_k(t))^{|Q(t)_{k,i}|} & (Q(t)_{k,i} < 0) \end{cases} \tag{C.13}$$

と書いた方が分かりやすいかもしれない.

*11) 話し言葉では x と $\mathcal{X}$ の区別が付かないので，筆者も他の研究者と話しているときに混乱したことがある.

(C.14) において q は量子化のパラメーターであり，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論への応用においては S_b^3 (4.4) の変形パラメーター b と次の関係にある：

$$q=e^{\sqrt{-1}\pi b^2}\ . \tag{C.16}$$

また，半古典極限，あるいは 2 次元への次元還元は $q\to 1$，すなわち $b\to 0$ で与えられる．

第 8.2 節での議論と同様に，$\hat{y}_i$ や $\hat{Y}_i$ を自然に線形に拡張したものを考えておくと便利である．第 8.2 節での議論は $\hat{Z}_i$ 及び $\hat{z}_i$ を $\hat{Y}_i$ や $\hat{y}_i$ と入れ替えることでそのまま用いることができる．

念のためこれを再度書いておくと，基底 γ_i により $\gamma=\sum_i n_i\gamma_i$ という格子の元（チャージ）を考え，$\hat{Y}_{n_1\gamma_1+n_2\gamma_2}=n_1\hat{Y}_{\gamma_1}+n_2\hat{Y}_{\gamma_2}, \hat{Y}_{\gamma_i}:=\hat{Y}_i$ とするのである．このとき，二つの元 $\gamma=\sum_i m_i\gamma_i, \gamma'=\sum_i n_i\gamma_i$ のペアリング（ディラックペアリング）を

$$\langle\gamma,\gamma'\rangle:=\sum_{i,j} m_i n_j Q_{i,j} \tag{C.17}$$

により定義すると，交換関係は

$$\left[\hat{Y}_\gamma,\hat{Y}_{\gamma'}\right]=-2\pi b^2\sqrt{-1}\,\langle\gamma,\gamma'\rangle \tag{C.18}$$

及び量子トーラス（**quantum torus**）

$$\mathcal{A}_Q:\hat{y}_\gamma\hat{y}_{\gamma'}=q^{2\langle\gamma',\gamma\rangle}\hat{y}_{\gamma'}\hat{y}_\gamma \tag{C.19}$$

となる．

C.2.3 ミューテーションの量子化

ミューテーションの作用も $\mathcal{A}_Q$ に作用する演算子に置き換わる．この演算子の作用は写像

$$\hat{\mu}_k:\quad \mathcal{A}_Q\to\mathcal{A}_{\mu_k Q} \tag{C.20}$$

を与え，より具体的に演算子 $\hat{\mu}_k$ の $\hat{y}_i$ への作用は，$i\neq k$ の時[*12)]

*12) これは

$$\hat{\mu}_k(\hat{y}_i):=\begin{cases}\hat{y}_i\displaystyle\prod_{m=1}^{|Q_{k,i}|}\left(1+q^{|Q_{k,i}|(2m-1)}\hat{y}_k{}^{-1}\right)^{-|Q_{k,i}|} & Q_{k,i}\geq 0\ ,\\ \hat{y}_i\displaystyle\prod_{m=1}^{|Q_{k,i}|}\left(1+q^{|Q_{k,i}|(2m-1)}\hat{y}_k\right)^{|Q_{k,i}|} & Q_{k,i}<0\end{cases} \tag{C.21}$$

とも書くことができる．

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu}_k(\hat{y}_i) : \\
&= q^{Q_{i,k}[Q_{k,i}]_+} \hat{y}_i \hat{y}_k{}^{[Q_{k,i}]_+} \prod_{m=1}^{|Q_{k,i}|} \left(1 + q^{-\mathrm{sgn}(Q_{k,i})(2m-1)} \hat{y}_k\right)^{-\mathrm{sgn}(Q_{k,i})} \\
&= q^{Q_{i,k}[-Q_{k,i}]_+} \hat{y}_i \hat{y}_k{}^{[-Q_{k,i}]_+} \prod_{m=1}^{|Q_{k,i}|} \left(1 + q^{\mathrm{sgn}(Q_{k,i})(2m-1)} \hat{y}_k{}^{-1}\right)^{-\mathrm{sgn}(Q_{k,i})},
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

また $i = k$ の時

$$
\hat{\mu}_k(\hat{y}_k) := \hat{y}_k{}^{-1} \tag{C.23}
$$

で与えられ，これを自然に $\mathcal{A}_Q$ の全体への作用に拡張できる*13).

こうして定義された $\hat{y}'_i$ が，新しい箙 $\mu_k Q$ のもとでの交換関係 (C.14) を満たすことは確認できる（演習問題 C.6）．従って $\hat{\mu}_k$ は実際に $\mathcal{A}_Q$ から $\mathcal{A}_{\mu_k Q}$ への写像を与えているといえる．

(C.22) 及び (C.23) は複雑な変換であるが，これを次のように二つの変換に分解するとその意味が理解しやすい．

まず最初の変換は，

$$
\hat{c}_k : \begin{array}{l} \hat{y}_{\gamma_k} \to \hat{y}_{-\gamma_k} = \hat{y}_{\gamma_k}^{-1} , \\ \hat{y}_{\gamma_i} \to \hat{y}_{\gamma_i + [Q_{ki}]_+ \gamma_k} \quad (i \neq k) . \end{array} \tag{C.24}
$$

この変換は，先程のチャージの変換則 (C.8) 及び (C.9) に従って定義したものであり，次節で定義するトロピカル y 変数の変換則と一致する．実際，$\hat{y}_{\gamma_i}$ が (C.15) を満たす時，こうして変換した後の $\hat{y}_\gamma$ は新しい箙 $Q' = \mu_k(Q)$ に対する (C.15) を満たすことが確認できる．なお，このために (C.19) から従う

$$
\hat{y}_{\gamma_i + [Q_{ki}]_+ \gamma_k} = q^{[Q_{ki}]_+ Q_{ik}} \hat{y}_i \hat{y}_k^{[Q_{ki}]_+} \tag{C.25}
$$

を用いる．

もう一つの変換は，量子ダイログ関数による共役である*14)：

---

*13) ここでの規約は例えば [2] のものと異なるので注意が必要である．文献によってはここで q^2 と書いたものを q と定義することがある．

*14) ここでは $\hat{K}_k$ の定義に $e_b(x) = e_{1/b}(x)$ を満たす量子ダイログ関数を用いたが，これは必要ではなく，例えば

$$
\begin{aligned}
&\Psi_q(x;q) := (-qx;q^2)_\infty , \\
&\Psi_q(q^2 x;q) = (1+qx)^{-1} \Psi_q(x;q)
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

を用いて（(B.10) 参照）

$$
\hat{K}_k : \hat{Y}_{\gamma_i} \to \Psi_q(\hat{y}_{\gamma_k})^{-1} \hat{Y}_{\gamma_i} \Psi_q(\hat{y}_{\gamma_k}) \tag{C.27}
$$

としても同じ効果が得られる．従って，例えば次節で議論する量子ダイログ恒等式も $e_b\left(\frac{X}{2\pi b}\right)$ を $\Psi_q(e^X = x)$ に置き換えて成立する．

$$\hat{K}_k : \hat{y}_{\gamma_i} \to e_b\left(\frac{\hat{Y}_{\gamma_k}}{2\pi b}\right)^{-1} \hat{y}_{\gamma_i}\, e_b\left(\frac{\hat{Y}_{\gamma_k}}{2\pi b}\right) . \tag{C.28}$$

ここで，$e_b(x)$ は付録 B で定義した量子ダイログ関数であり，(B.28) より

$$e_b(x+ib) = (1+qe^{2\pi bx})^{-1} e_b(x) \tag{C.29}$$

を満たしていた．

$\hat{c}_k$ と $\hat{K}_k$，この二つの合成

$$\hat{\mu}_k := \hat{K}_{\gamma_k} \hat{c}_k \tag{C.30}$$

が (C.22)，(C.23) と一致することは直接の計算で示せる．

ここまでではただ 1 回の箙の変異を考えたが，変異を繰り返すこともできる．その結果箙 Q は別の箙 Q' に変化し，

$$Q' = \mu_{k_L} \cdots \mu_{k_1}(Q) . \tag{C.31}$$

演算子 $\bar{\mu}_k$ の積は B の量子トーラスから B' の量子トーラスへの写像

$$\hat{\mu}_{k_L} \cdots \hat{\mu}_{k_1} : \mathcal{A}_{Q(0)} \to \mathcal{A}_{Q(L)} \tag{C.32}$$

を与える．

C.2.4　量子ダイログ恒等式

箙 Q に対し，二つの異なるミューテーションの列 $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_L)$，$\boldsymbol{l} = (l_1, \cdots, l_L)$ がその結果同じ箙 Q かつ（I の元，つまり箙の頂点のラベルの置換を除いて）同じ y 変数を与えることがある．このとき，$\mu_{\boldsymbol{k}}$ と $\mu_{\boldsymbol{l}}$ についての二つの写像 (C.32) は（量子 y 変数の定義を引き起こすものであったから）一致する．このとき成立するのが**量子ダイログ恒等式**（**quantum dilogarithm identity**）[240]~[242] である．量子ダイログ関数は数理物理の様々な文脈で現れる興味深い恒等式である．例えば，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 BPS 状態の数え上げ，あるいはより数学的には（一般化された）**ドナルドソン＝トーマス不変量**（**Donaldson-Thomas invariant**）の**壁超え現象**（**wall crossing phenomenon**）を支配するコンツェビッチ＝ソイベルマンの公式[243] に現れる．4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論 BPS 状態の数え上げと 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の S^3 分配関数の両方において同じ量子ダイログ関数が現れることは偶然ではない[185], [244]．

$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{l}$ が同じ箙と y 変数を与えるという主張は，まず最初に $\boldsymbol{k}$，次に $\boldsymbol{l}$ の逆変換 $\boldsymbol{l}^{-1}$ を行った新しい $\boldsymbol{l}^{-1}\boldsymbol{k}$ が（I の元の置換を除いて）箙と y 変数を自明に保つという主張と等価であるので，以下ではその形の仮定を用いることにしよう．

本付録では A_2 型箙の例の場合に対応する量子ダイログ恒等式を書き下しておこう．より一般の場合は記号がやや煩雑なのでここでは明白には述べないが，

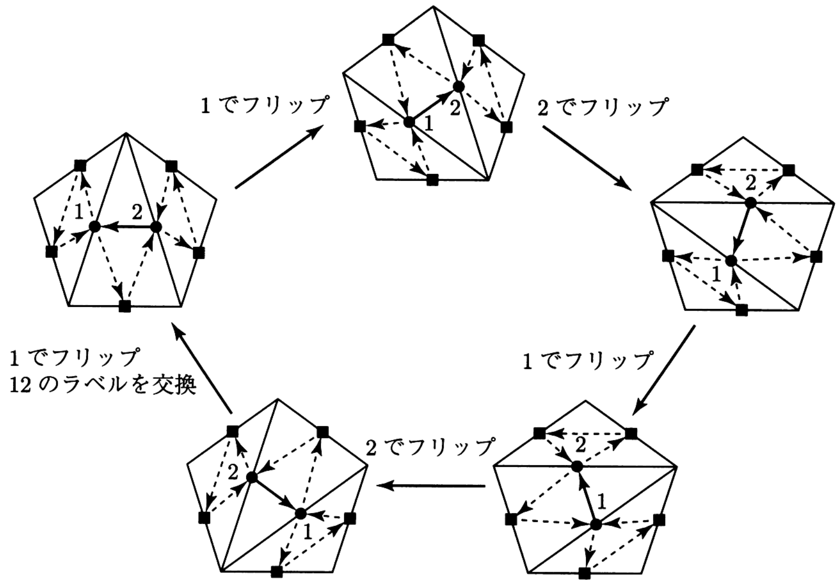


図 C.5 ペンタゴンに対応する箙の変化．内部の二つの辺が A_2 箙を与え，ペンタゴンはその 5 回のミューテーションからなる．ここから量子ダイログ関数に対するペンタゴン恒等式が導かれる．

一般的なルールは明らかになるように説明したつもりである．

まず，A_2 型箙

$$1 \longleftarrow 2 \tag{C.33}$$

を考える．量子 y 変数は二つの頂点に対応して二つ独立なもの y_1, y_2 が存在し，$y_1 y_2 = q^2 y_2 y_1$ を満たす．今から考えるのは頂点 $(1,2,1,2,1)$ でのミューテーションである．これは，実はフリップの満たすペンタゴンに対応している．図 C.5 は，第 8.1.5 節の図 8.7 において，図 8.4 のルールに従って箙を定めたものである．このとき 5 角形の内部の辺に対応する二つの頂点及びそれらの間の矢印のみを書くと，A_2 型箙とその頂点 $(1,2,1,2,1)$ でのフリップが得られる*15)．

(C.22) 及び (C.23) を用いて y 変数を計算すると

$$\begin{aligned}
y(1) &= (y_1, y_2)\ , \\
y(2) &= (y_1^{-1}, y_2(1+qy_1))\ , \\
y(3) &= (y_1^{-1}(1+qy_2+y_1y_2), y_2^{-1}(1+q^{-1}y_1)^{-1})\ , \\
y(4) &= (y_1(1+qy_2+y_1y_2)^{-1}, q^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}(1+qy_2))\ , \\
y(5) &= (y_2^{-1}, q^{-1}y_1y_2(1+q^{-1}y_2)^{-1})\ , \\
y(6) &= (y_2, y_1)
\end{aligned} \tag{C.34}$$

*15) 5 角形の 5 つの辺に対応する箙の頂点，及びそれらに結ばれた辺についてはここでは用いない．一般に，このようにそこではミューテーションを行うことのない箙の頂点のことをフリーズした頂点（**frozen vertex**）と呼ぶ．

となる．y 変数は複雑な変換を経るが，最終的には y_1 と y_2 の入れ替えを除いて元の y 変数に戻ってきたことに注意しよう．これが今仮定したいことであった．

さて，こうして得られた量子 y 変数及びそのミューテーションにおいて，

$$1+(y\text{ の正のべきを持った単項式の和})\longrightarrow 1 \tag{C.35}$$

とする操作を考えよう．例えばこのとき $y_1^{-1}(1+qy_2+y_1y_2)\to y_1^{-1}$．この操作は**トロピカル化**（**tropicalization**）と呼ばれ，（量子）y 変数からトロピカル化によって得られたものを**トロピカル y 変数**（**tropical y-variable**）と呼び，ここでは $\overline{y}$ と書くことにしよう．このトロピカル化を (C.34) のそれぞれに実行すると

$$\begin{aligned}
&y(1)\longrightarrow\overline{y}(1)=(\underline{y_1},\,y_2)\ ,\\
&y(2)\longrightarrow\overline{y}(2)=(y_1^{-1},\,\underline{y_2})\ ,\\
&y(3)\longrightarrow\overline{y}(3)=(\underline{y_1^{-1}},\,y_2)\ ,\\
&y(4)\longrightarrow\overline{y}(4)=(y_1,\,\underline{q^{-1}y_1^{-1}y_2^{-1}=y_{-\gamma_1-\gamma_2}})\ ,\\
&y(5)\longrightarrow\overline{y}(5)=(\underline{y_2}^{-1},\,q^{-1}y_1y_2=y_{\gamma_1+\gamma_2})\ ,\\
&y(6)\longrightarrow\overline{y}(6)=(y_2,\,y_1)
\end{aligned} \tag{C.36}$$

を得る．ここで下線を付けたのはミューテーションする頂点に対応するトロピカル y 変数である．それらの変数のチャージを読み取ると（つまり $y_{\sum_i (c_t)_i\gamma_i}$ と表し $(c_t)_i$ を読み取ると）

$$\begin{aligned}
c_1 &=(1,0)\ , & \epsilon_1&=+\ ,\\
c_2 &=(0,1)\ , & \epsilon_2&=+\ ,\\
c_3 &=(-1,0)\ , & \epsilon_3&=-\ ,\\
c_4 &=(-1,-1)\ , & \epsilon_4&=-\ ,\\
c_5 &=(0,-1)\ , & \epsilon_5&=-
\end{aligned} \tag{C.37}$$

を得る．こうして得られた c_t は c–ベクトルと呼ばれるものであり，その変換則は第 C.1.1 節で導入されたチャージの変換則と一致する．また，興味深いことに c_t の 0 でない成分は全て同じ符号を持っており，その符号を ϵ_t と書いた（この符号は**トロピカル符号**（**tropical sign**）と呼ばれる）．

さて，これまでの準備のもとで，量子ダイログ恒等式は演算子 $e_b\left(\frac{Y_{c_t\epsilon_t}}{2\pi b}\right)^{\epsilon_t}$ を時刻順に左から右に並べたときに，その積が自明であるという主張である．今の場合にそれを書くと

$$e_b\left(\frac{Y_1}{2\pi b}\right)e_b\left(\frac{Y_2}{2\pi b}\right)e_b\left(\frac{Y_1}{2\pi b}\right)^{-1}e_b\left(\frac{Y_1+Y_2}{2\pi b}\right)^{-1}e_b\left(\frac{Y_2}{2\pi b}\right)^{-1}=1\ . \tag{C.38}$$

今 $P:=\frac{Y_1}{2\pi b}, Q:=\frac{Y_2}{2\pi b}$ と書くことにすると，これは $[P,Q]=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$ を満たす

演算子の組 P, Q について

$$e_b(P)\, e_b(Q)\, e_b(P)^{-1}\, e_b(P+Q)^{-1}\, e_b(Q)^{-1} = 1\ . \tag{C.39}$$

これは量子ダイログ関数のペンタゴン恒等式 (B.62) に他ならない.

量子ダイログ恒等式の証明は，クラスター代数の設定のもとで整理すると比較的簡単である．方針だけ述べておこう．まず，二つのミューテーションの列が同じ量子 y 変数を与えること，またそれぞれのミューテーションは $\hat{\mu}_k$ で書けていたことから，$\hat{\mu}_k$ 達の積に関する恒等式が成立する（ここで表現の既約性とシューア（Schur）の補題を用いた）．それぞれの写像 $\hat{\mu}_k$ は (C.30) にあるように，基底 $\hat{Y}_i$ に対する線形変換 $\hat{c}_k$ 及び量子ダイログ関数による作用 $\hat{K}_k$ で書かれていた：

$$\cdots \hat{K}_{k_2}\hat{c}_{k_2}\hat{K}_{k_1}\hat{c}_{k_1}\ . \tag{C.40}$$

今演算子 $\hat{K}$ と $\hat{c}$ は互い違いになっているが，$\hat{c}_k$ による共役は線形変換を引き起こすことが分かっているので全て右（あるいは左）に*16) 集めてやることができる（これはシャッフリングの議論と呼ばれることがある*17)）．さらに，先の議論から分かるように $\hat{c}$ はトロピカル化された量子 y 変数の変換を引き起こすが，量子 y 変数が一致すれば，トロピカル化された量子 y 変数も一致することが自明に従うので $\hat{c}$ はそれ自身でキャンセルする．従って，残りの $\hat{K}$ 達の積もそれ自身でキャンセルしなければならない．これが量子ダイログ恒等式である．

演習問題

C.1 [♦]（ミューテーションの練習）箙のミューテーションの定義式は複雑に見えるかもしれないが，少し慣れれば何も見ずとも箙のミューテーションを実行できるようになる．また，計算せずともクリックでミューテーションを実行できる Java アプレットもあり便利である*18)．

簡単な箙を自分で書いて，適当に頂点を選んでミューテーションを実行せよ．それを何回か繰り返してみよう．二つの頂点に対してミューテーションを取る順番を代えるとどうなるだろうか？ また，4 点球面の理想三角形分割から与えられる箙（図 8.5）に対してミューテーションを取っていくと，いくつの箙が得られるだろうか？

参考までに，箙のミューテーションを繰り返した時，有限個の箙しか現れない箙は**有限型**（**有限ミューテーション型，finite mutation type**）と呼ばれる．そのような箙（のミューテーションによる同値類）は完全に分類されている[245]．

---

*16) 本文で述べたのは "tropical form" と呼ばれる形の量子ダイログ恒等式であるが，$\hat{c}_k$ を右に集めるか左に集めるか，その左右を逆に取ると "universal form" と呼ばれる別の（しかし等価な）量子ダイログ恒等式を得ることができる[242]．

*17) これは簡単ではあるがいろいろ応用がきく議論であり，例えば量子パラメーター q が一の冪根の時は同じ議論を使って量子ダイログ恒等式の一の冪根バージョンを導くことができる[227]．

*18) ホームページ http://www.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/ からダウンロードできる．ちなみに，このページには未解決問題もあり，最初にそれを解決した人は賞金 20 ユーロがもらえることになっている．野心的な読者は是非挑戦されたい．

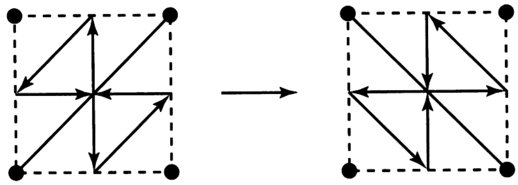


図 C.6　理想三角形分割に対するフリップは箙のミューテーションを引き起こす．

C.2　[♦]（ミューテーションとフリップ）

(a)　2 次元面の理想三角形分割にフリップを施したとき，図 8.4 による定まる箙は図 C.6 のように変化する．これが三角形分割の対角線に対応する箙の頂点における箙のミューテーションと一致することを示せ．

(b)　今度は同じことを図 8.4 ではなく，A_N 型のルール図 9.8 で実行しよう．理想三角形分割のフリップを行うためには，どのようなフリップを，また何回行えばよいだろうか？

C.3　[♦]（c–ベクトルとミューテーション）

チャージベクトルの変換則 (C.8)，(C.9) 及び箙をチャージベクトルにより定める式 (C.6) から，箙の変換則 (C.2) を導け．

C.4　[♦]（ミューテーションとザイバーグ双対）第 1.3.3 節で紹介したザイバーグ双対性が，箙のミューテーションの言葉で書き表せることを納得せよ．（ヒント：図 C.6 の箙を参考にせよ．$N_f = 2N_c$ の場合を考え，クォークと反クォークそれぞれに作用する $SU(N_f) \times SU(N_f)$ 大域対称性のうち $SU(N_c)^4$ 大域対称性のみを露わに保つとよい．ミューテーションのルールとの一致を確かめるには，スーパーポテンシャルの情報も不可欠である．）

C.5　[♦]（クラスター代数としてのフリップ）4 点球面の理想三角形分割から与えられる箙（図 (8.5)）を考える．理想三角形分割にフリップを施した時，対応する箙はフリップした辺に対応する箙の頂点についてのミューテーションと一致することを確かめよ．また，対応するクラスター x 変数及び y 変数の変換則 (C.11) 及び (C.12) はペナー変数及びフック変数の変換則 (8.15)，(8.14) と一致することを確かめよ．

C.6　[♦]（量子クラスター y 変数の変換則）(C.22)，(C.23) により定義された $\hat{y}'_i$ が，新しい箙 $\mu_k Q$（式 (C.2)）のもとでの交換関係 (C.14) を満たすことを確認せよ．

C.7　[♦]（A_3, A_4 型の量子ダイログ恒等式）

図 C.5 は 5 角形の三角形分割を用いたが，これを 6 角形や 7 角形に置き換え，その三角形分割（の一つ）から得られる A_3, A_4 型の箙

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \;, \quad 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \;, \tag{C.41}$$

に対応する量子ダイログ恒等式を書き下せ．さらに，それらの恒等式が量子ダイログ関数のペンタゴンから従うことを示せ．

参考文献

[1] 山崎雅人, "場の理論の分解学", 数理科学 第 50 巻, 10 月号, 7 (2012), http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2012/QFT_decompose_science_2012.pdf.

[2] 山崎雅人, "団代数と超対称ゲージ理論", 数理科学 第 53 巻, 3 月号, 51 (2015), http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2015/cluster_science_2015.pdf.

[3] 山崎雅人, "物理に託した思い", パリティ 第 30 巻, 7 月号, 山崎雅人 (2015).

[4] J. Wess and J. Bagger, *"Supersymmetry and supergravity"*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1983), i+180p.

[5] N. Arkani-Hamed, G. L. Kane, J. Thaler and L.-T. Wang, *"Supersymmetry and the LHC inverse problem"*, JHEP 0608, 070 (2006), hep-ph/0512190.

[6] K. Wilson and J. B. Kogut, *"The Renormalization group and the epsilon expansion"*, Phys.Rept. 12, 75 (1974).

[7] S. Weinberg, *"The quantum theory of fields. Vol. I"*, Cambridge University Press, Cambridge (1995), xxvi+609p, Foundations.

[8] S. Weinberg, *"What is quantum field theory, and what did we think it is?"*, hep-th/9702027.

[9] J. Polchinski, *"Renormalization and Effective Lagrangians"*, Nucl.Phys. B231, 269 (1984).

[10] R. G. Leigh and M. J. Strassler, *"Exactly marginal operators and duality in four-dimensional N=1 supersymmetric gauge theory"*, Nucl.Phys. B447, 95 (1995), hep-th/9503121.

[11] T. Banks and A. Zaks, *"On the Phase Structure of Vector-Like Gauge Theories with Massless Fermions"*, Nucl.Phys. B196, 189 (1982).

[12] S. R. Coleman, *"The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model"*, Phys.Rev. D11, 2088 (1975).

[13] S. Mandelstam, *"Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation"*, Phys.Rev. D11, 3026 (1975).

[14] S. Mandelstam, *"Quantum electrodynamics without potentials"*, Annals Phys. 19, 1 (1962).

[15] A. A. Migdal, *"Loop Equations and 1/N Expansion"*, Phys.Rept. 102, 199 (1983).

[16] S. R. Coleman and D. J. Gross, *"Price of asymptotic freedom"*, Phys.Rev.Lett. 31, 851 (1973).

[17] T. Baks, *"Modern Quantum Field Theory"*, Cambridge University Press (2008), Cambridge, 271p.

[18] J. Polchinski, *"Dualities of Fields and Strings"*, arxiv:1412.5704.

[19] C. Montonen and D. I. Olive, *"Magnetic Monopoles as Gauge Particles?"*, Phys.Lett. B72, 117 (1977).

[20] J. Gomis, T. Okuda and D. Trancanelli, *"Quantum 't Hooft operators and S-duality in N=4 super Yang-Mills"*, Adv.Theor.Math.Phys. 13, 1941 (2009), arxiv:0904.4486.

[21] C. Romelsberger, *"Counting chiral primaries in N = 1, d=4 superconformal field theories"*, Nucl.Phys. B747, 329 (2006), hep-th/0510060.

[22] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla and S. Raju, *"An Index for 4 Dimensional Super Conformal Theories"*, Commun. Math. Phys. 275, 209 (2007), hep-th/0510251.

[23] A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli and S. S. Razamat, *"S-duality and 2d Topological QFT"*, JHEP 1003, 032 (2010), arxiv:0910.2225.

[24] V. Spiridonov and G. Vartanov, *"Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities II. Orthogonal groups, knots, and vortices"*, Commun.Math.Phys. 325, 421 (2014), arxiv:1107.5788.

[25] F. Benini, T. Nishioka and M. Yamazaki, *"4d Index to 3d Index and 2d TQFT"*, Phys.Rev. D86, 065015 (2012), arxiv:1109.0283.

[26] S. S. Razamat and B. Willett, *"Global Properties of Supersymmetric Theories and the Lens Space"*, Commun. Math. Phys. 334, 661 (2015), arxiv:1307.4381.

[27] P. Goddard, J. Nuyts and D. I. Olive, *"Gauge Theories and Magnetic Charge"*, Nucl.Phys. B125, 1 (1977).

[28] N. Seiberg, *"Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories"*, Nucl.Phys. B435, 129 (1995), hep-th/9411149.

[29] K. A. Intriligator and N. Seiberg, *"Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories"*, Phys.Lett. B387, 513 (1996), hep-th/9607207.

[30] M. Aganagic, K. Hori, A. Karch and D. Tong, *"Mirror symmetry in (2+1)-dimensions and (1+1)-dimensions"*, JHEP 0107, 022 (2001), hep-th/0105075.

[31] E. Witten, *"Solutions of four-dimensional field theories via M theory"*, Nucl.Phys. B500, 3 (1997), hep-th/9703166.

[32] D. Gaiotto, *"N=2 dualities"*, JHEP 1208, 034 (2012), arxiv:0904.2715.

[33] Y. Tachikawa, *"N=2 supersymmetric dynamics for pedestrians"*, Lect.Notes Phys. 890, 2014 (2013), arxiv:1312.2684.

[34] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theory on Duality Walls"*, JHEP 1108, 135 (2011), arxiv:1103.5748.

[35] T. Dimofte and S. Gukov, *"Chern-Simons Theory and S-duality"*, JHEP 1305, 109 (2013), arxiv:1106.4550.

[36] G. 't Hooft, *"Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking"*, NATO Sci.Ser.B 59, 135 (1980).

[37] C. Beasley, *"Global Aspects of Abelian Duality in Dimension Three"*, JHEP 1408, 146 (2014), arxiv:1405.2123.

[38] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *"Characteristic classes"*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo (1974), vii+331p, Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[39] E. Witten, *"SL(2,Z) action on three-dimensional conformal field theories with Abelian symmetry"*, hep-th/0307041.

[40] C. Burgess and B. P. Dolan, *"Particle vortex duality and the modular group: Applications to the quantum Hall effect and other 2-D systems"*, Phys.Rev. B63, 155309 (2001), hep-th/0010246.

[41] K. A. Intriligator, D. R. Morrison and N. Seiberg, *"Five-dimensional supersymmetric gauge theories and degenerations of Calabi-Yau spaces"*, Nucl.Phys. B497, 56 (1997), hep-th/9702198.

[42] O. Aharony, A. Hanany, K. A. Intriligator, N. Seiberg and M. Strassler, *"Aspects of N=2 supersymmetric gauge theories in three-dimensions"*, Nucl.Phys. B499, 67 (1997),

hep-th/9703110.

[43] J. de Boer, K. Hori and Y. Oz, *"Dynamics of N=2 supersymmetric gauge theories in three-dimensions"*, Nucl.Phys. B500, 163 (1997), hep-th/9703100.

[44] 今村洋介, "超対称 Chern-Simons 理論と M2 ブレーン", 素粒子論研究電子版 1, 今村洋介 (2009), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol1/cs-and-m2.pdf.

[45] N. Seiberg, *"Naturalness versus supersymmetric nonrenormalization theorems"*, Phys.Lett. B318, 469 (1993), hep-ph/9309335.

[46] A. Redlich, *"Parity Violation and Gauge Noninvariance of the Effective Gauge Field Action in Three-Dimensions"*, Phys.Rev. D29, 2366 (1984).

[47] A. Redlich, *"Gauge Noninvariance and Parity Violation of Three-Dimensional Fermions"*, Phys.Rev.Lett. 52, 18 (1984).

[48] G. V. Dunne, *"Aspects of Chern-Simons theory"*, hep-th/9902115.

[49] E. Witten, *"An SU(2) Anomaly"*, Phys.Lett. B117, 324 (1982).

[50] E. Witten, *"On flux quantization in M theory and the effective action"*, J.Geom.Phys. 22, 1 (1997), hep-th/9609122.

[51] I. Affleck, J. A. Harvey and E. Witten, *"Instantons and (Super)Symmetry Breaking in (2+1)-Dimensions"*, Nucl.Phys. B206, 413 (1982).

[52] A. Hashimoto, P. Ouyang and M. Yamazaki, *"Boundaries and defects of $\mathcal{N}=4$ SYM with 4 supercharges. Part II: Brane constructions and 3d $\mathcal{N}=2$ field theories"*, JHEP 1410, 108 (2014), arxiv:1406.5501.

[53] K. Intriligator and N. Seiberg, *"Aspects of 3d N=2 Chern-Simons-Matter Theories"*, JHEP 1307, 079 (2013), arxiv:1305.1633.

[54] K. Hori and C. Vafa, *"Mirror symmetry"*, hep-th/0002222.

[55] S. R. Coleman and B. R. Hill, *"No More Corrections to the Topological Mass Term in QED in Three-Dimensions"*, Phys.Lett. B159, 184 (1985).

[56] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia, Z. Komargodski and N. Seiberg, *"Comments on Chern-Simons Contact Terms in Three Dimensions"*, JHEP 1209, 091 (2012), arxiv:1206.5218.

[57] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *"Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern- Simons Theories with Matter"*, JHEP 1003, 089 (2010), arxiv:0909.4559.

[58] D. L. Jafferis, *"The Exact Superconformal R-Symmetry Extremizes Z"*, JHEP 1205, 159 (2012), arxiv:1012.3210.

[59] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, *"Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere"*, JHEP 1103, 127 (2011), arxiv:1012.3512.

[60] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *"From weak to strong coupling in ABJM theory"*, Commun.Math.Phys. 306, 511 (2011), arxiv:1007.3837.

[61] C. P. Herzog, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and T. Tesileanu, *"Multi-Matrix Models and Tri-Sasaki Einstein Spaces"*, Phys.Rev. D83, 046001 (2011), arxiv:1011.5487.

[62] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, *"Towards a derivation of holographic entanglement entropy"*, JHEP 1105, 036 (2011), arxiv:1102.0440.

[63] R. C. Myers and A. Sinha, *"Holographic c-theorems in arbitrary dimensions"*, JHEP 1101, 125 (2011), arxiv:1011.5819.

[64] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, *"Towards the F-Theorem: N=2*

Field Theories on the Three-Sphere", JHEP 1106, 102 (2011), arxiv:1103.1181.

[65] H. Casini and M. Huerta, *"On the RG running of the entanglement entropy of a circle"*, Phys.Rev. D85, 125016 (2012), arxiv:1202.5650.

[66] V. Pestun, *"Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops"*, Commun.Math.Phys. 313, 71 (2012), arxiv:0712.2824.

[67] F. Benini and S. Cremonesi, *"Partition Functions of $\mathcal{N}=(2,2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices"*, Commun. Math. Phys. 334, 1483 (2015), arxiv:1206.2356.

[68] N. Doroud, J. Gomis, B. Le Floch and S. Lee, *"Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories"*, JHEP 1305, 093 (2013), arxiv:1206.2606.

[69] D. Honda and T. Okuda, *"Exact results for boundaries and domain walls in 2d supersymmetric theories"*, arxiv:1308.2217.

[70] S. Sugishita and S. Terashima, *"Exact Results in Supersymmetric Field Theories on Manifolds with Boundaries"*, JHEP 1311, 021 (2013), arxiv:1308.1973.

[71] K. Hori and M. Romo, *"Exact Results In Two-Dimensional (2,2) Supersymmetric Gauge Theories With Boundary"*, arxiv:1308.2438.

[72] A. Gadde and S. Gukov, *"2d Index and Surface operators"*, JHEP 1403, 080 (2014), arxiv:1305.0266.

[73] F. Benini, R. Eager, K. Hori and Y. Tachikawa, *"Elliptic Genera of 2d $\mathcal{N}=2$ Gauge Theories"*, Commun. Math. Phys. 333, 1241 (2015), arxiv:1308.4896.

[74] M. Yamazaki, *"Four-dimensional superconformal index reloaded"*, Theor.Math.Phys. 174, 154 (2013).

[75] M. Marino, *"Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern-Simons-matter theories"*, J.Phys.A A44, 463001 (2011), arxiv:1104.0783.

[76] S. Cremonesi, *"An Introduction to Localisation and Supersymmetry in Curved Space"*, PoS 2013, 002 (2014).

[77] 今村洋介, "調和関数展開による 3 次元分配関数の計算", 素粒子論研究電子版 16, 今村洋介 (2014), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol16/imamura.html.

[78] K. Hosomichi, *"A review on SUSY gauge theories on S^3"*, arxiv:1412.7128.

[79] G. Festuccia and N. Seiberg, *"Rigid Supersymmetric Theories in Curved Superspace"*, JHEP 1106, 114 (2011), arxiv:1105.0689.

[80] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and Z. Komargodski, *"Supersymmetric Field Theories on Three-Manifolds"*, JHEP 1305, 017 (2013), arxiv:1212.3388.

[81] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and Z. Komargodski, *"The Geometry of Supersymmetric Partition Functions"*, JHEP 1401, 124 (2014), arxiv:1309.5876.

[82] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, *"SUSY Gauge Theories on Squashed Three-Spheres"*, JHEP 1105, 014 (2011), arxiv:1102.4716.

[83] Y. Imamura and D. Yokoyama, *"N=2 supersymmetric theories on squashed three-sphere"*, Phys.Rev. D85, 025015 (2012), arxiv:1109.4734.

[84] E. Witten, *"Two-dimensional gauge theories revisited"*, J.Geom.Phys. 9, 303 (1992), hep-th/9204083.

[85] S. Giombi and V. Pestun, *"Correlators of local operators and 1/8 BPS Wilson loops on S**2 from 2d YM and matrix models"*, JHEP 1010, 033 (2010), arxiv:0906.1572.

[86] D. Gang, *"Chern-Simons theory on L(p,q) lens spaces and Localization"*, arxiv:0912.4664.

[87] L. F. Alday, M. Fluder and J. Sparks, *"The Large N limit of M2-branes on Lens spaces"*, JHEP 1210, 057 (2012), arxiv:1204.1280.

[88] A. Tanaka, *"Comments on knotted 1/2 BPS Wilson loops"*, JHEP 1207, 097 (2012), arxiv:1204.5975.

[89] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *"Exact results for supersymmetric abelian vortex loops in 2+1 dimensions"*, JHEP 1306, 099 (2013), arxiv:1211.2861.

[90] N. Drukker, T. Okuda and F. Passerini, *"Exact results for vortex loop operators in 3d supersymmetric theories"*, JHEP 1407, 137 (2014), arxiv:1211.3409.

[91] S. Kim, *"The Complete superconformal index for N=6 Chern-Simons theory"*, Nucl.Phys. B821, 241 (2009), arxiv:0903.4172.

[92] Y. Imamura and S. Yokoyama, *"Index for three dimensional superconformal field theories with general R-charge assignments"*, JHEP 1104, 007 (2011), arxiv:1101.0557.

[93] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, *"Mirror symmetry"*, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA (2003), xx+929p.

[94] S. R. Coleman, *"More About the Massive Schwinger Model"*, Annals Phys. 101, 239 (1976).

[95] N. Dorey and D. Tong, *"Mirror symmetry and toric geometry in three-dimensional gauge theories"*, JHEP 0005, 018 (2000), hep-th/9911094.

[96] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, *"N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals"*, JHEP 0810, 091 (2008), arxiv:0806.1218.

[97] K. Okuyama, *"A Note on the Partition Function of ABJM theory on S^3"*, Prog.Theor.Phys. 127, 229 (2012), arxiv:1110.3555.

[98] P. Putrov and M. Yamazaki, *"Exact ABJM Partition Function from TBA"*, Mod.Phys.Lett. A27, 1250200 (2012), arxiv:1207.5066.

[99] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *"Exact Instanton Expansion of ABJM Partition Function"*, arxiv:1507.01678.

[100] D. Shale, *"Linear symmetries of free boson fields"*, Trans. Amer. Math. Soc. 103, 149 (1962).

[101] A. Weil, *"Sur certains groupes d'opérateurs unitaires"*, Acta Math. 111, 143 (1964).

[102] J. Leray, *"Lagrangian analysis and quantum mechanics"*, MIT Press (1981), Cambridge, Mass., xvii+271p.

[103] V. Guillemin and S. Sternberg, *"Symplectic techniques in physics"*, second edition, Cambridge University Press (1990), Cambridge, xii+468p.

[104] N. Hama and K. Hosomichi, *"Seiberg-Witten Theories on Ellipsoids"*, JHEP 1209, 033 (2012), arxiv:1206.6359.

[105] N. A. Nekrasov, *"Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting"*, Adv. Theor. Math. Phys. 7, 831 (2004), hep-th/0206161.

[106] N. Drukker, D. Gaiotto and J. Gomis, *"The Virtue of Defects in 4D Gauge Theories and 2D CFTs"*, JHEP 1106, 025 (2011), arxiv:1003.1112.

[107] D. Gaiotto and E. Witten, *"S-Duality of Boundary Conditions in N=4 Super Yang-Mills Theory"*, Adv.Theor.Math.Phys. 13, 721 (2009), arxiv:0807.3720.

[108] D. Galakhov, A. Mironov and A. Morozov, *"S-Duality and Modular Transformation as a non-perturbative deformation of the ordinary pq-duality"*, JHEP 1406, 050 (2014),

arxiv:1311.7069.
[109] T. Nishioka, Y. Tachikawa and M. Yamazaki, *"3d Partition Function as Overlap of Wavefunctions"*, JHEP 1108, 003 (2011), arxiv:1105.4390.
[110] B. Assel, *"Hanany-Witten effect and SL(2, $\mathbb{Z}$) dualities in matrix models"*, JHEP 1410, 117 (2014), arxiv:1406.5194.
[111] M. Atiyah, *"Topological quantum field theories"*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1410, 175 (1988).
[112] G. Segal, *"The definition of conformal field theory"*, in: *"Topology, geometry and quantum field theory"*, Cambridge Univ. Press (2004), Cambridge, 421–577p.
[113] E. Witten, *"Some comments on string dynamics"*, hep-th/9507121.
[114] S. Cecotti, C. Cordova and C. Vafa, *"Braids, Walls, and Mirrors"*, arxiv:1110.2115.
[115] S. Lee and M. Yamazaki, *"3d Chern-Simons Theory from M5-branes"*, JHEP 1312, 035 (2013), arxiv:1305.2429.
[116] C. Cordova and D. L. Jafferis, *"Complex Chern-Simons from M5-branes on the Squashed Three-Sphere"*, arxiv:1305.2891.
[117] J. Yagi, *"3d TQFT from 6d SCFT"*, JHEP 1308, 017 (2013), arxiv:1305.0291.
[118] Y. Luo, M.-C. Tan, J. Yagi and Q. Zhao, *"Ω-deformation of B-twisted gauge theories and the 3d-3d correspondence"*, JHEP 1502, 047 (2015), arxiv:1410.1538.
[119] N. J. Hitchin, *"The self-duality equations on a Riemann surface"*, Proc. London Math. Soc. (3) 55, 59 (1987).
[120] D. Xie and K. Yonekura, *"The moduli space of vacua of $\mathcal{N} = 2$ class S theories"*, JHEP 1410, 134 (2014), arxiv:1404.7521.
[121] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, *"Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories"*, Lett. Math. Phys. 91, 167 (2010), arxiv:0906.3219.
[122] G. Vartanov and J. Teschner, *"Supersymmetric gauge theories, quantization of moduli spaces of flat connections, and conformal field theory"*, arxiv:1302.3778.
[123] K. Hosomichi, S. Lee and J. Park, *"AGT on the S-duality Wall"*, JHEP 1012, 079 (2010), arxiv:1009.0340.
[124] H. L. Verlinde, *"Conformal Field Theory, 2-D Quantum Gravity and Quantization of Teichmuller Space"*, Nucl. Phys. B337, 652 (1990).
[125] E. Witten, *"Quantum Field Theory and the Jones Polynomial"*, Commun. Math. Phys. 121, 351 (1989).
[126] S. Elitzur, G. W. Moore, A. Schwimmer and N. Seiberg, *"Remarks on the Canonical Quantization of the Chern-Simons-Witten Theory"*, Nucl.Phys. B326, 108 (1989).
[127] N. Nekrasov and E. Witten, *"The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory"*, JHEP 1009, 092 (2010), arxiv:1002.0888.
[128] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Semiclassical Analysis of the 3d/3d Relation"*, Phys. Rev. D88, 026011 (2013), arxiv:1106.3066.
[129] T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, *"Gauge Theories Labelled by Three-Manifolds"*, Commun. Math. Phys. 325, 367 (2014), arxiv:1108.4389.
[130] T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, *"3-Manifolds and 3d Indices"*, Adv. Theor. Math. Phys. 17, 975 (2013), arxiv:1112.5179.
[131] E. Witten, *"Topological Quantum Field Theory"*, Commun.Math.Phys. 117, 353 (1988).

[132] E. Witten, *"Quantization of Chern-Simons Gauge Theory with Complex Gauge Group"*, Commun. Math. Phys. 137, 29 (1991).

[133] E. Witten, *"Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory"*, arxiv:1001.2933.

[134] E. Witten, *"Supersymmetry and Morse theory"*, J.Diff.Geom. 17, 661 (1982).

[135] N. Marcus, *"The Other topological twisting of N=4 Yang-Mills"*, Nucl.Phys. B452, 331 (1995), hep-th/9506002.

[136] M. Blau and G. Thompson, *"Aspects of $N_T \geq 2$ topological gauge theories and D-branes"*, Nucl.Phys. B492, 545 (1997), hep-th/9612143.

[137] A. Kapustin and E. Witten, *"Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program"*, Commun.Num.Theor.Phys. 1, 1 (2007), hep-th/0604151.

[138] E. Witten, *"A New Look At The Path Integral Of Quantum Mechanics"*, arxiv:1009.6032.

[139] T. Dimofte, *"Complex Chern-Simons theory at level k via the 3d-3d correspondence"*, arxiv:1409.0857.

[140] D. Gang, N. Kim and S. Lee, *"Holography of 3d-3d correspondence at Large N"*, JHEP 1504, 091 (2015), arxiv:1409.6206.

[141] S. Pasquetti, *"Factorisation of $N = 2$ Theories on the Squashed 3-Sphere"*, JHEP 1204, 120 (2012), arxiv:1111.6905.

[142] C. Beem, T. Dimofte and S. Pasquetti, *"Holomorphic Blocks in Three Dimensions"*, arxiv:1211.1986.

[143] F. Benini and W. Peelaers, *"Higgs branch localization in three dimensions"*, JHEP 1405, 030 (2014), arxiv:1312.6078.

[144] M. Fujitsuka, M. Honda and Y. Yoshida, *"Higgs branch localization of 3d $\mathcal{N} = 2$ theories"*, PTEP 2014, 123B02 (2014), arxiv:1312.3627.

[145] E. Witten, *"(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System"*, Nucl.Phys. B311, 46 (1988).

[146] W. P. Thurston, *"The Geometry and Topology of Three-Manifolds"*, http://library.msri.org/nonmsri/gt3m/.

[147] W. P. Thurston, *"Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1"*, Princeton University Press (1997), Princeton, NJ, x+311p, Edited by Silvio Levy.

[148] 小島定吉, "3 次元の幾何", 朝倉書店 (2002).

[149] 谷口雅彦, 松崎克彦, "双曲多様体とクライン群", 日本評論社 (1993).

[150] D. Rolfsen, *"Knots and links"*, Publish or Perish Inc. (1976), Berkeley, Calif., ix+439p, Mathematics Lecture Series, No. 7.

[151] *"The Knot Atlas"*, http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page.

[152] D. Jungreis, *"Gaussian random polygons are globally knotted"*, J. Knot Theory Ramifications 3, 455 (1994).

[153] R. Myers, *"Simple knots in compact, orientable 3-manifolds"*, Trans. Amer. Math. Soc. 273, 75 (1982).

[154] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long and P. B. Shalen, *"Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds"*, Invent. Math. 118, 47 (1994).

[155] R. M. Kashaev, *"The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm"*, q-alg/9601025.

[156] H. Murakami and J. Murakami, *"The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot"*, Acta Math. 186, 85 (2001).

[157] H. Murakami, *"An introduction to the volume conjecture"*, in: *"Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory"*, Amer. Math. Soc. (2011), Providence, RI, 1–40p.

[158] S. Gukov, *"Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A polynomial"*, Commun. Math. Phys. 255, 577 (2005), hep-th/0306165.

[159] 藤博之, "結び目不変量と量子場の理論", 数理物理 2012 予稿集.

[160] H.-J. Chung, T. Dimofte, S. Gukov and P. Sułkowski, *"3d-3d Correspondence Revisited"*, arxiv:1405.3663.

[161] J. P. Gauntlett, N. Kim and D. Waldram, *"M Five-branes wrapped on supersymmetric cycles"*, Phys.Rev. D63, 126001 (2001), hep-th/0012195.

[162] R. Dijkgraaf and E. Witten, *"Topological Gauge Theories and Group Cohomology"*, Commun.Math.Phys. 129, 393 (1990).

[163] L. Alvarez-Gaume, J. Labastida and A. Ramallo, *"A Note on Perturbative Chern-Simons Theory"*, Nucl.Phys. B334, 103 (1990).

[164] W. Chen, G. W. Semenoff and Y.-S. Wu, *"Two loop analysis of nonAbelian Chern-Simons theory"*, Phys.Rev. D46, 5521 (1992), hep-th/9209005.

[165] J. Milnor, *"On the existence of a connection with curvature zero"*, Comment. Math. Helv. 32, 215 (1958).

[166] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *"An introduction to Teichmüller spaces"*, Springer-Verlag (1992), Tokyo, xiv+279p, Translated and revised from the Japanese by the authors.

[167] 河野俊丈, "曲面の幾何構造とモジュライ", 日本評論社 (1997).

[168] 長尾健太郎, "3 次元双曲幾何とクラスター代数", 数理物理 2012 予稿集.

[169] N. Drukker, D. R. Morrison and T. Okuda, *"Loop operators and S-duality from curves on Riemann surfaces"*, JHEP 0909, 031 (2009), arxiv:0907.2593.

[170] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, *"Framed BPS States"*, Adv.Theor.Math.Phys. 17, 241 (2013), arxiv:1006.0146.

[171] R. C. Penner, *"Universal constructions in Teichmüller theory"*, Adv. Math. 98, 143 (1993).

[172] L. Chekhov and V. Fock, *"Quantum Teichmuller space"*, Theor.Math.Phys. 120, 1245 (1999), math/9908165.

[173] R. M. Kashaev, *"Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm"*, Lett. Math. Phys. 43, 105 (1998).

[174] Y. Ito, T. Okuda and M. Taki, *"Line operators on $S^1 \times R^3$ and quantization of the Hitchin moduli space"*, JHEP 1204, 010 (2012), arxiv:1111.4221.

[175] J. Teschner, *"From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces"*, hep-th/0308031.

[176] J. Teschner, *"An analog of a modular functor from quantized Teichmuller theory"*, math/0510174.

[177] J. Teschner, *"Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I"*, Adv.Theor.Math.Phys. 15, 471 (2011), arxiv:1005.2846.

[178] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *"Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. II. Geometric interpretation of the evolution operator"*, J. Phys. A 35, 4043 (2002).

[179] N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda and J. Teschner, *"Gauge Theory Loop Operators and Liouville Theory"*, JHEP 1002, 057 (2010), arxiv:0909.1105.

[180] R. Kashaev, *"The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory"*, in: *"Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory (Kiev, 2000)"*, Kluwer Acad. Publ. (2001), Dordrecht, 211–221p.

[181] E. Witten, *"The Central charge in three-dimensions"*, in: *"Brink, L. (ed.) et al.: Physics and mathematics of strings"*, 530-559p.

[182] R. C. Penner, *"The decorated Teichmüller space of punctured surfaces"*, Comm. Math. Phys. 113, 299 (1987).

[183] W. D. Neumann and D. Zagier, *"Volumes of hyperbolic three-manifolds"*, Topology 24, 307 (1985).

[184] T. Dimofte, *"3d Superconformal Theories from Three-Manifolds"*, `arxiv:1412.7129`.

[185] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"3d N=2 Theories from Cluster Algebras"*, PTEP 023, B01 (2014), `arxiv:1301.5902`.

[186] K. Hikami and R. Inoue, *"Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundles and 2-bridge links"*, J. Knot Theory Ramifications 23, 1450006 (2014), `arxiv:1212.6042`.

[187] W. Floyd and A. Hatcher, *"Incompressible surfaces in punctured-torus bundles"*, Topology Appl. 13, 263 (1982).

[188] M. Lackenby, *"The canonical decomposition of once-punctured torus bundles"*, Comment. Math. Helv. 78, 363 (2003).

[189] F. Guéritaud, *"On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements"*, Geom. Topol. 10, 1239 (2006), With an appendix by David Futer.

[190] J.-P. Otal, *"Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3"*, Astérisque 10, x (1996).

[191] K. Hikami and R. Inoue, *"Braiding operator via quantum cluster algebra"*, J. Phys. A 47, 474006 (2014), `arxiv:1404.2009`.

[192] R. M. Kashaev, *"Quantum dilogarithm as a 6j-symbol"*, Modern Phys. Lett. A 9, 3757 (1994).

[193] M. Sakuma and J. Weeks, *"Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements"*, Japan. J. Math. (N.S.) 21, 393 (1995).

[194] D. Futer and F. Guéritaud, *"Explicit angle structures for veering triangulations"*, Algebr. Geom. Topol. 13, 205 (2013), `arxiv:1012.5134`.

[195] V. Fock and A. Goncharov, *"Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory"*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 103, 1 (2006).

[196] T. Dimofte, M. Gabella and A. B. Goncharov, *"K-Decompositions and 3d Gauge Theories"*, `arxiv:1301.0192`.

[197] D. Xie, *"Network, Cluster coordinates and N=2 theory I"*, `arxiv:1203.4573`.

[198] G. K. Francis, *"A topological picturebook"*, Springer-Verlag, New York (1987), xvi+194p.

[199] G. K. Francis, "トポロジーの絵本", シュプリンガー (2005), 笠原 晧司（監訳), 宮崎 興二（訳).

[200] M. Yamazaki, *"Brane Tilings and Their Applications"*, Fortsch.Phys. 56, 555 (2008), `arxiv:0803.4474`, Master's Thesis.

[201] S. Franco, *"Bipartite Field Theories: from D-Brane Probes to Scattering Amplitudes"*, JHEP 1211, 141 (2012), `arxiv:1207.0807`.

[202] M. Yamazaki, *"New Integrable Models from the Gauge/YBE Correspondence"*, J.Statist.Phys. 154, 895 (2014), `arxiv:1307.1128`.

[203] M. Yamazaki, *"Quivers, YBE and 3-manifolds"*, JHEP 1205, 147 (2012), `arxiv:1203.5784`.

[204] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Emergent 3-manifolds from 4d Superconformal Indices"*, Phys.Rev.Lett. 109, 091602 (2012), arxiv:1203.5792.

[205] J. J. Heckman, C. Vafa, D. Xie and M. Yamazaki, *"String Theory Origin of Bipartite SCFTs"*, JHEP 1305, 148 (2013), arxiv:1211.4587.

[206] A. Strominger, *"Massless black holes and conifolds in string theory"*, Nucl.Phys. B451, 96 (1995), hep-th/9504090.

[207] F. Benini, D. S. Park and P. Zhao, *"Cluster algebras from dualities of 2d N=(2,2) quiver gauge theories"*, arxiv:1406.2699.

[208] J. Polchinski, *"String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond"*.

[209] A. N. Kirillov, *"Dilogarithm identities"*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 118, 61 (1995), hep-th/9408113.

[210] L. J. Rogers, *"On Function Sum Theorems Connected with the Series Formula"*, Proc. London Math. Soc. S2-4, 169 (1906).

[211] I. C. Ip, *"The Graphs of Quantum Dilogarithm"*, arxiv:1108.5376.

[212] T. Shintani, *"On a Kronecker limit formula for real quadratic fields"*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24, 167 (1977).

[213] N. Kurokawa, *"Multiple sine functions and Selberg zeta functions"*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 67, 61 (1991).

[214] L. Faddeev and A. Y. Volkov, *"Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice"*, Phys. Lett. B 315, 311 (1993).

[215] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *"Quantum dilogarithm"*, Modern Phys. Lett. A 9, 427 (1994).

[216] L. D. Faddeev, *"Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group"*, Lett. Math. Phys. 34, 249 (1995), hep-th/9504111.

[217] A. Y. Volkov, *"Noncommutative hypergeometry"*, Comm. Math. Phys. 258, 257 (2005).

[218] B. Ponsot and J. Teschner, *"Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of U(q)(sl(2,R))"*, Commun.Math.Phys. 224, 613 (2001), math/0007097.

[219] V. P. Spiridonov, *"Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions"*, Uspekhi Mat. Nauk 63, 3 (2008).

[220] S. N. M. Ruijsenaars, *"First order analytic difference equations and integrable quantum systems"*, J. Math. Phys. 38, 1069 (1997).

[221] S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, *"Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q-deformed Toda chains"*, Commun. Math. Phys. 225, 573 (2002), hep-th/0102180.

[222] E. W. Barnes, *"The Genesis of the Double Gamma Functions"*, Proc. London Math. Soc. S1-31, 358.

[223] S. N. M. Ruijsenaars, *"On Barnes' multiple zeta and gamma functions"*, Adv. Math. 156, 107 (2000).

[224] L. Faddeev, *"Modular double of a quantum group"*, in: *"Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon)"*, Kluwer Acad. Publ. (2000), Dordrecht, 149–156p.

[225] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev and A. Y. Volkov, *"Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality"*, Commun. Math. Phys. 219, 199 (2001),

hep-th/0006156.

[226] S. Garoufalidis and R. Kashaev, *"Evaluation of state integrals at rational points"*, arxiv:1411.6062.

[227] I. C.-H. Ip and M. Yamazaki, *"Quantum Dilogarithm Identities at Root of Unity"*, arxiv:1412.5777.

[228] S. Fomin and A. Zelevinsky, *"Cluster algebras I: Foundations"*, J. Amer. Math. Soc. 15, 497 (2002).

[229] B. Keller, *"Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories"*, arXiv:0807.1960.

[230] "特集：団代数をめぐって–新たな共通構造の認識–", 数理科学 第53巻, 3月号, (2015).

[231] P. D. Francesco, M. Gekhtman, A. Kuniba and M. Yamazaki, *"Special issue on cluster algebras in mathematical physics"*, J.Phys.A A47, M. Yamazaki (2014).

[232] M. Gekhtman, M. Shapiro and A. Vainshtein, *"Cluster algebras and Poisson geometry"*, American Mathematical Society (2010), Providence, RI, xvi+246p.

[233] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, *"Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes"*, Acta Math. 201, 83 (2008).

[234] K. Nagao, Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Hyperbolic 3-manifolds and Cluster Algebras"*, arxiv:1112.3106.

[235] S. Cecotti and C. Vafa, *"Classification of complete N=2 supersymmetric theories in 4 dimensions"*, Surveys in differential geometry 18, 19 (2013), arxiv:1103.5832.

[236] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, *"Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation"*, arxiv:0907.3987.

[237] M. Alim, S. Cecotti, C. Cordova, S. Espahbodi, A. Rastogi et al., *"$\mathcal{N} = 2$ quantum field theories and their BPS quivers"*, Adv.Theor.Math.Phys. 18, 27 (2014), arxiv:1112.3984.

[238] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *"Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm"*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42, 865 (2009).

[239] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *"The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties"*, Invent. Math. 175, 223 (2009).

[240] B. Keller, *"On cluster theory and quantum dilogarithm identities"*, in: *"Representations of algebras and related topics"*, Eur. Math. Soc., Zürich (2011), 85–116p.

[241] M. Reineke, *"Poisson automorphisms and quiver moduli"*, J. Inst. Math. Jussieu 9, 653 (2010).

[242] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *"Classical and Quantum Dilogarithm Identities"*, SIGMA 7, 102 (2011), arxiv:1104.4630.

[243] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *"Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations"*, arxiv:0811.2435.

[244] S. Cecotti, A. Neitzke and C. Vafa, *"R-Twisting and 4d/2d Correspondences"*, arxiv:1006.3435.

[245] A. Felikson, M. Shapiro and P. Tumarkin, *"Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type"*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 14, 1135 (2012).

記号表

$(x;q)_n, (x;q)_\infty$　q-ポッホハンマー記号, 式 (B.8), 174 ページ

$\alpha, \beta, \ldots$　スピノルの足, 式 (3.1), 38 ページ

$\mathbb{H}^3$　3 次元双曲空間, 式 (7.38), 121 ページ

Δ, Δ_i　理想四面体, 式 (9.2), 149 ページ

Γ　$PSL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群（クライン群）, 式 (7.41), 122 ページ

γ　双対フォトン, 式 (2.10), 32 ページ

$\hat{y}_i(t)$　量子 y 変数, 式 (C.14), 193 ページ

$\mathcal{A}$　複素化されたゲージ場, 式 (7.2), 111 ページ

$\mathcal{A}_Q$　量子トーラス, 式 (8.23), 141 ページ, 式 (C.19), 194 ページ

$\mathcal{M}_{\text{平坦}}$　平坦接続のモジュライ空間, 式 (7.30), 119 ページ

$\mathcal{T}_{g,h}$　タイヒュミュラー空間, 式 (8.3), 132 ページ

$\mathcal{V}$　モノポール演算子, 式 (3.35), 49 ページ

$\mathfrak{l}$　ロンギチュード, 式 (7.46), 125 ページ

$\mathfrak{m}$　メリディアン, 式 (7.46), 125 ページ

μ_k　頂点 k での箙のミューテーション, 式 (C.2), 189 ページ

$\overline{\sigma}$　複素化された σ, 式 (4.26), 65 ページ

Φ　カイラル超場（カイラル多重項）, 式 (3.11), 40 ページ

$\mathcal{F}_{\alpha,E}(q)$　共形ブロック, 式 (6.26), 106 ページ

$\mathcal{W}(\Sigma)$　ツイステッド・スーパーポテンシャル, 式 (4.42), 71 ページ

Σ　カレントを含む線形多重項, 式 (3.19), 42 ページ

σ　ベクトル多重項のスカラー, 式 (3.13), 40 ページ

σ^μ　パウリ行列, 式 (3.3), 39 ページ

τ　複素化された結合定数, 式 (1.13), 14 ページ

$\mathrm{Li}_2(x)$　古典ダイログ関数（オイラー・ダイログ関数）, 式 (B.1), 172 ページ

φ　リーマン面の写像類群の元, 式 (6.30), 107 ページ

ζ　FI パラメーター, 式 (3.30), 46 ページ

a　4 次元のクーロンブランチパラメーター, 式 (5.32), 86 ページ

b　S^3 の変形パラメーター, 式 (4.4), 61 ページ

C　積分サイクル, 式 (7.15), 115 ページ

$C_\alpha, C_{\bar{\alpha}}$　積分サイクルの基底, 式 (7.15), 115 ページ

$e_b(x)$　量子ダイログ関数, 式 (B.21), 176 ページ

g_5　5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のゲージ結合定数, 式 (6.11), 98 ページ

k　チャーン＝サイモンズ項のレベル, 式 (3.25), 44 ページ

索 引

欧字

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著者略歴

山崎　雅人
やま ざき　まさ ひと

1983 年　愛知県名古屋市生まれ
2010 年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修了
　　　　博士（理学）
2010 年　日本学術振興会博士研究員（カブリ数物連携宇宙研究機構）
2010 年　プリンストン大学理論科学センター博士研究員
2012 年　井上研究奨励賞
2013 年　プリンストン高等研究所メンバー，
　　　　東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構特任助教
　　　　現在に至る.
専　門　素粒子理論，場の理論，超弦理論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 119
『場の理論の構造と幾何　3 次元超対称場の理論からその先へ』
著　者　山崎 雅人
2015 年 9 月 25 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 ©　株式会社 サイエンス社　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-114：for Senior & Graduate Courses）

ゲージ理論の基礎数理

物理学的背景からトポロジー，微分幾何，関数解析まで

橋本　義武　著

定価 2500 円

ゲージ理論に必要な数学をまとめて解説した今までにない一冊.

サイエンス社